Matematica della geodesia, degli spazi metrici e topologici

Parte I - Fondamenti Teorici delle Varietà Riemanniane nella Geodesia

Capitolo 1: La Geometria Differenziale delle Superfici

1.1 Introduzione alle Varietà Riemanniane

La geodesia moderna si fonda sulla teoria delle varietà riemanniane, che costituisce il quadro matematico rigoroso entro il quale si possono descrivere le proprietà geometriche della superficie terrestre. Una varietà riemanniana è definita come una coppia ordinata costituita da una varietà differenziabile M di dimensione n e da un tensore metrico g che assegna ad ogni punto p della varietà un prodotto scalare definito positivo sullo spazio tangente in quel punto.

Formalmente, se M è una varietà differenziabile di classe C^∞ con infiniti derivate continue e di dimensione n, il tensore metrico g è una sezione liscia del fibrato dei tensori simmetrici di tipo (0,2) costruito sul fibrato tangente TM. Questo significa che g associa ad ogni punto p in M un tensore g_p che opera sullo spazio tangente T_p M.

In coordinate locali $(x^1, x^2, ..., x^n)$, il tensore metrico si esprime come una forma quadratica:

$g = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$

dove g_{ij} sono le componenti del tensore metrico rispetto alla base coordinata, e la somma è sottintesa secondo la convenzione di Einstein per gli indici ripetuti. Il simbolo $\otimes$ denota il prodotto tensoriale delle forme differenziali dx^i e dx^j.

La condizione di definitezza positiva richiede che per ogni vettore tangente non nullo $v = v^i \partial/\partial x^i$ si abbia:

$g(v,v) = g_{ij}\, v^i\, v^j > 0$

dove la quantità $g_{ij}\, v^i\, v^j$ rappresenta la norma quadrata del vettore v rispetto alla metrica g. La matrice delle componenti g_{ij} deve quindi essere simmetrica e definita positiva in ogni punto della varietà. Questo implica che il determinante della matrice g_{ij}, che denotiamo con g, sia strettamente positivo:

$g = \det(g_{ij}) > 0$

in ogni punto di M. Questa condizione garantisce l'invertibilità locale della matrice metrica e permette di definire la matrice inversa g^{ij} mediante la relazione:

$g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j$

dove δ^i_j è il simbolo di Kronecker, che vale uno se i = j e zero altrimenti.

1.2 La Metrica sulla Superficie Terrestre

Per la superficie terrestre, considerata come varietà bidimensionale immersa nello spazio euclideo tridimensionale, possiamo introdurre una parametrizzazione locale mediante coordinate (u^1, u^2). La posizione di un punto sulla superficie è data dal vettore posizione $r(u^1, u^2)$, che è una funzione liscia a valori in $\mathbb{R}^3$.

I vettori tangenti fondamentali alla superficie sono definiti come le derivate parziali del vettore posizione rispetto alle coordinate:

$r_1 = \partial r/\partial u^1$

$r_2 = \partial r/\partial u^2$

Questi vettori generano lo spazio tangente in ogni punto della superficie. Le componenti del tensore metrico, dette anche coefficienti della prima forma fondamentale, sono allora date dai prodotti scalari di questi vettori tangenti:

$g_{11} = r_1 \cdot r_1 = E$

$g_{12} = g_{21} = r_1 \cdot r_2 = F$

$g_{22} = r_2 \cdot r_2 = G$

dove E, F, G sono le notazioni tradizionali introdotte da Carl Friedrich Gauss nei suoi studi fondamentali sulla geometria delle superfici. Queste tre quantità caratterizzano interamente la geometria intrinseca della superficie.

L'elemento di lunghezza infinitesimo sulla superficie è espresso dall'equazione fondamentale:

$ds^2 = E(du^1)^2 + 2F\, du^1\, du^2 + G(du^2)^2$

Questa espressione costituisce la metrica riemanniana indotta sulla superficie dall'immersione nello spazio euclideo. La forma quadratica ds^2 permette di calcolare la lunghezza di qualsiasi curva sulla superficie integrando l'elemento di lunghezza lungo la curva stessa.

1.3 La Curvatura di Gauss e il Theorema Egregium

Uno degli sviluppi più significativi nella geometria differenziale delle superfici è rappresentato dal theorema egregium di Gauss, che stabilisce l'intrinsecità della curvatura gaussiana. Per comprendere questo risultato fondamentale, dobbiamo prima introdurre la seconda forma fondamentale, che misura la curvatura estrinseca della superficie.

Data una superficie S regolare immersa in $\mathbb{R}^3$, in ogni punto p esiste un versore normale n(p) alla superficie, definito univocamente a meno del segno. La seconda forma fondamentale quantifica come la superficie si discosta dal proprio piano tangente nelle immediate vicinanze del punto considerato.

I coefficienti della seconda forma fondamentale sono definiti mediante le derivate seconde del vettore posizione:

$L = r_{11} \cdot n$

$M = r_{12} \cdot n$

$N = r_{22} \cdot n$

dove r_{ij} denota la derivata parziale seconda $\partial^2 r/\partial u^i \partial u^j$, calcolata derivando prima rispetto a u^i e poi rispetto a u^j. Queste quantità possono anche essere espresse utilizzando le equazioni di Weingarten:

$L = -r_1 \cdot n_1$

$M = -r_1 \cdot n_2 = -r_2 \cdot n_1$

$N = -r_2 \cdot n_2$

dove n_i indica la derivata parziale $\partial n/\partial u^i$. L'uguaglianza $M = -r_1 \cdot n_2 = -r_2 \cdot n_1$ deriva dal teorema di Schwarz sulla commutatività delle derivate parziali miste, che garantisce che $r_{12} = r_{21}$.

La curvatura gaussiana K è definita come il determinante dell'operatore di forma, noto anche come operatore di Weingarten, che mappa vettori tangenti in vettori tangenti secondo la regola:

$S(v) = -\nabla_v n$

dove ∇ denota la derivata covariante e v è un vettore tangente arbitrario. In termini dei coefficienti delle forme fondamentali, la curvatura gaussiana è espressa dalla formula di Gauss:

$K = (LN - M^2)/(EG - F^2)$

Il numeratore LN - M² rappresenta il determinante della matrice della seconda forma fondamentale, mentre il denominatore EG - F² è il determinante della matrice della prima forma fondamentale, che coincide con g.

Il theorema egregium afferma che la curvatura gaussiana K dipende esclusivamente dal tensore metrico g_ij e dalle sue derivate prime e seconde, e non dalla particolare immersione della superficie nello spazio ambiente. Questo significa che K è una proprietà intrinseca della geometria riemanniana della superficie, e può essere calcolata senza alcun riferimento allo spazio tridimensionale circostante.

1.4 Dimostrazione del Theorema Egregium

Per dimostrare il theorema egregium, dobbiamo derivare le equazioni di compatibilità di Gauss. Iniziamo calcolando le derivate miste del vettore posizione. Consideriamo:

r_112 = $\partial^3 r/\partial u^1 \partial u^1 \partial u^2$

r_121 = $\partial^3 r/\partial u^1 \partial u^2 \partial u^1$

Per la continuità delle derivate parziali, assumendo che la superficie sia almeno di classe C^3, queste due espressioni devono coincidere identicamente. Per sfruttare questa uguaglianza, esprimiamo le derivate seconde r_ij mediante i simboli di Christoffel e il versore normale.

La formula fondamentale che decompone le derivate seconde è:

r_ij = Γ^k_ij r_k + L_ij n

dove Γ^k_ij sono i simboli di Christoffel di seconda specie, L_11 = L, L_12 = M, L_22 = N sono i coefficienti della seconda forma fondamentale, e la somma su k = 1,2 è sottintesa.

I simboli di Christoffel sono definiti dalle relazioni fondamentali:

Γ^k_ij = (1/2) g^kl (∂g_il/∂u^j + ∂g_jl/∂u^i - ∂g_ij/∂u^l)

dove g^kl denota la componente (k,l) della matrice inversa di g_ij, che soddisfa:

g^km g_ml = δ^k_l

Calcoliamo ora r_112 utilizzando la formula di decomposizione:

r_11 = Γ^k_11 r_k + L n

Derivando rispetto a u²:

r_112 = $\partial/\partial u^2$(Γ^k_11 r_k + L n)

= (∂Γ^k_11/∂u^2) r_k + Γ^k_11 r_k2 + (∂L/∂u^2) n + L n_2

Espandendo r_k2 utilizzando ancora la formula di decomposizione:

r_k2 = Γ^m_k2 r_m + L_k2 n

dove L_12 = M, L_22 = N. Sostituendo:

r_112 = (∂Γ^k_11/∂u²) r_k + Γ^k_11(Γ^m_k2 r_m + L_k2 n) + (∂L/∂u²) n + L n_2

Raccogliendo i termini secondo le componenti tangenziali e normali:

Componente tangenziale:

(∂Γ^k_11/∂u²) r_k + Γ^k_11 Γ^m_k2 r_m = (∂Γ^m_11/∂u² + Γ^k_11 Γ^m_k2) r_m

Componente normale:

Γ^k_11 L_k2 n + (∂L/∂u²) n + L n_2

Per esprimere n_2, utilizziamo le equazioni di Weingarten, che permettono di decomporre le derivate del versore normale nella base tangente:

n_i = -b^k_i r_k

dove b^k_i sono i coefficienti dell'operatore di forma, legati alla seconda forma fondamentale da:

b^k_i = g^kj L_ji

Con questa notazione:

n_2 = -b^k_2 r_k = -g^km L_m2 r_k

Sostituendo nella componente normale:

Γ^k_11 L_k2 n + (∂L/∂u²) n - L g^km L_m2 r_k

Analogamente, calcoliamo r_121:

r_12 = Γ^k_12 r_k + M n

Derivando rispetto a u¹:

r_121 = (∂Γ^k_12/∂u¹) r_k + Γ^k_12 r_k1 + (∂M/∂u¹) n + M n_1

Espandendo r_k1:

r_k1 = Γ^m_k1 r_m + L_k1 n

dove L_11 = L, L_21 = M. Sostituendo e separando componenti tangenziali e normali otteniamo espressioni analoghe.

Uguagliando le componenti tangenziali di r_112 e r_121 (che devono essere identiche per la commutatività delle derivate parziali), si ottengono le equazioni di Gauss, che nella forma più compatta si scrivono:

$\partial \Gamma^k_{ij}/\partial u^l - \partial \Gamma^k_{il}/\partial u^j + \Gamma^m_{ij} \Gamma^k_{ml} - \Gamma^m_{il} \Gamma^k_{mj} = R^k_{ijl}$

dove R^k_{ijl} è il tensore di curvatura di Riemann della superficie. Per una superficie bidimensionale, questo tensore ha una sola componente indipendente, che è legata alla curvatura gaussiana dalla relazione fondamentale:

$R^1_{212} = K g_{11}$

Esplicitando questa relazione in termini dei simboli di Christoffel e semplificando mediante le proprietà di simmetria, si arriva alla formula di Brioschi per la curvatura gaussiana:

$K = (1/\sqrt{g}) [\partial/\partial u^2(\sqrt{g} \Gamma^1_{11}/g_{11}) - \partial/\partial u^1(\sqrt{g} \Gamma^1_{12}/g_{11})]$

dove $g = \det(g_{ij}) = EG - F^2$. Questa espressione dipende solo dai coefficienti metrici g_{ij} e dalle loro derivate, dimostrando il theorema egregium nella sua forma completa.

La profondità di questo risultato risiede nel fatto che la curvatura gaussiana, pur essendo definita in termini della seconda forma fondamentale (che è una quantità estrinseca legata all'immersione della superficie nello spazio), può essere interamente espressa in termini della prima forma fondamentale (che è intrinseca). Questo significa che due superfici con la stessa metrica riemanniana hanno necessariamente la stessa curvatura gaussiana, indipendentemente da come siano immerse nello spazio.

Capitolo 2: Il Tensore di Riemann-Christoffel e le Equazioni di Compatibilità

2.1 Definizione del Tensore di Curvatura

Il tensore di curvatura di Riemann-Christoffel è l'oggetto geometrico fondamentale che codifica tutte le informazioni sulla curvatura di una varietà riemanniana. Nella sua forma controvariante con un indice superiore e tre inferiori, è definito come:

$R^l_{ijk} = \partial \Gamma^l_{jk}/\partial x^i - \partial \Gamma^l_{ik}/\partial x^j + \Gamma^m_{jk} \Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik} \Gamma^l_{jm}$

dove i simboli di Christoffel Γ^l_{jk} sono calcolati dalla metrica mediante la formula già introdotta. Questa espressione può sembrare complessa, ma ha un significato geometrico preciso: misura la non commutatività delle derivate covarianti.

Infatti, dati due campi vettoriali X e Y e un terzo campo Z, il tensore di Riemann è definito dalla relazione:

$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$

dove ∇ denota la derivata covariante e [X,Y] è la parentesi di Lie dei campi vettoriali X e Y.

In uno spazio piatto (come lo spazio euclideo), le derivate covarianti commutano e il tensore di Riemann si annulla identicamente. La presenza di curvatura si manifesta proprio attraverso la non commutatività della derivazione covariante.

2.2 Proprietà di Simmetria del Tensore di Riemann

Il tensore di Riemann gode di numerose proprietà di simmetria fondamentali che riducono drasticamente il numero delle sue componenti indipendenti. Abbassando l'indice controvariante mediante il tensore metrico, otteniamo il tensore interamente covariante:

R_hijk = g_hl R^l_ijk

Questo tensore soddisfa le seguenti identità di simmetria:

Prima proprietà (antisimmetria nei primi due indici):

R_hijk = -R_ihjk

Questa proprietà discende direttamente dalla definizione del tensore come commutatore di derivate covarianti. Se scambiamo X e Y nella definizione R(X,Y)Z, il segno cambia.

Seconda proprietà (antisimmetria negli ultimi due indici):

R_hijk = -R_hikj

Questa simmetria è meno evidente dalla definizione e richiede una dimostrazione che utilizza la compatibilità della connessione con la metrica.

Terza proprietà (simmetria per scambio delle coppie):

R_hijk = R_kjhi

Questa proprietà afferma che scambiando la prima coppia di indici (h,i) con la seconda coppia (k,j), il tensore rimane invariato.

Quarta proprietà (identità ciclica, prima identità di Bianchi):

R_hijk + R_hjki + R_hkij = 0

Questa identità si ottiene sommando ciclicamente il tensore sui tre ultimi indici.

Per dimostrare rigorosamente queste proprietà, procediamo sistematicamente. Iniziamo con la prima proprietà, che è immediata dalla definizione:

R_hijk = g_hl R^l_ijk

= g_hl (∂Γ^l_jk/∂x^i - ∂Γ^l_ik/∂x^j + Γ^m_jk Γ^l_im - Γ^m_ik Γ^l_jm)

Scambiando i con h (cioè scambiando gli indici nella derivata covariante):

R_ihjk = g_il R^l_hjk

= g_il (∂Γ^l_jk/∂x^h - ∂Γ^l_hk/∂x^j + Γ^m_jk Γ^l_hm - Γ^m_hk Γ^l_jm)

Confrontando con R_hijk, notiamo che i termini si scambiano con un cambio di segno, quindi:

R_ihjk = -R_hijk

Per la seconda proprietà (antisimmetria negli ultimi due indici), la dimostrazione è più sottile e richiede l'uso della compatibilità della connessione di Levi-Civita con la metrica. La condizione di compatibilità afferma che:

∇_k g_ij = 0

dove ∇_k denota la derivata covariante rispetto alla coordinata x^k. Esplicitamente:

∂g_ij/∂x^k - Γ^l_ki g_lj - Γ^l_kj g_il = 0

Questa condizione, combinata con l'assenza di torsione (Γ^k_ij = Γ^k_ji), permette di dimostrare che:

R_hijk = -R_hikj

La dimostrazione completa richiede calcoli estesi che omettiamo per brevità, ma che possono essere trovati in qualsiasi testo avanzato di geometria riemanniana.

Per la terza proprietà, dobbiamo dimostrare che:

R_hijk = R_kjhi

Questa simmetria emerge dalla struttura profonda del tensore di curvatura e dalla sua relazione con la curvatura sezionale. Per dimostrarla, si utilizzano le prime due proprietà di antisimmetria insieme con la prima identità di Bianchi.

2.3 La Seconda Identità di Bianchi

La seconda identità di Bianchi è un'identità differenziale che coinvolge le derivate covarianti del tensore di Riemann:

$\nabla_l R_{hijk} + \nabla_i R_{hjkl} + \nabla_j R_{hkli} = 0$

In forma intrinseca, questa si scrive come:

$(\nabla_X R)(Y,Z,W,U) + (\nabla_Y R)(Z,X,W,U) + (\nabla_Z R)(X,Y,W,U) = 0$

dove X, Y, Z sono campi vettoriali arbitrari e W, U sono vettori su cui agisce il tensore.

La dimostrazione più elegante della seconda identità di Bianchi utilizza il formalismo delle forme differenziali e le equazioni di struttura di Cartan. Dalla seconda equazione di struttura di Cartan:

$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$

dove ω è la matrice delle forme di connessione e Ω è la matrice delle forme di curvatura, deriviamo esternamente entrambi i membri.

Applicando il differenziale esterno:

$d\Omega = d(d\omega + \omega \wedge \omega)$

Poiché il differenziale esterno soddisfa $d \circ d = 0$, abbiamo $d(d\omega) = 0$, quindi:

$d\Omega = d(\omega \wedge \omega)$

Utilizzando la regola di Leibniz per il differenziale del prodotto esterno:

$d(\omega \wedge \omega) = d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega$

Ma dalla seconda equazione di struttura sappiamo che:

$d\omega = \Omega - \omega \wedge \omega$

Sostituendo:

$d(\omega \wedge \omega) = (\Omega - \omega \wedge \omega) \wedge \omega - \omega \wedge (\Omega - \omega \wedge \omega)$

$= \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega + \omega \wedge \omega \wedge \omega$

$= \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega$

I termini $\omega \wedge \omega \wedge \omega$ si cancellano a vicenda. Quindi otteniamo:

$d\Omega = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega$

Questa è la seconda identità di Bianchi nella forma di Cartan. Scrivendola esplicitamente in componenti tensoriali e sviluppando il differenziale esterno, si ottiene la forma tensoriale:

$\nabla_l R^m_{ijk} + \nabla_i R^m_{jkl} + \nabla_j R^m_{kli} = 0$

Questa identità ha conseguenze profonde in geometria differenziale e nella relatività generale, dove conduce alle equazioni di conservazione dell'energia-momento.

2.4 Contrazioni del Tensore di Riemann

Dal tensore di Riemann completo, possiamo costruire tensori di rango inferiore mediante contrazioni (sommazioni) su coppie di indici. La contrazione più importante è il tensore di Ricci, ottenuto sommando sul primo e terzo indice:

$R_{ik} = R^j_{ijk} = g^{jm} R_{mijk}$

In forma esplicita, sviluppando la definizione del tensore di Riemann:

$R_{ik} = g^{jm} (\partial \Gamma^l_{jk}/\partial x^i - \partial \Gamma^l_{ik}/\partial x^j + \Gamma^p_{jk} \Gamma^l_{ip} - \Gamma^p_{ik} \Gamma^l_{jp}) g_{lm}$

Semplificando mediante $g^{jm} g_{lm} = \delta^j_l$:

$R_{ik} = \partial \Gamma^j_{jk}/\partial x^i - \partial \Gamma^j_{ik}/\partial x^j + \Gamma^p_{jk} \Gamma^j_{ip} - \Gamma^p_{ik} \Gamma^j_{jp}$

Questa espressione può essere ulteriormente semplificata notando che:

$\Gamma^j_{jk} = (1/2)\, g^{jl} (\partial g_{lk}/\partial x^j + \partial g_{jl}/\partial x^k - \partial g_{jk}/\partial x^l)$

$= (1/2)\, g^{jl}\, \partial g_{lk}/\partial x^j + (1/2)\, g^{jl}\, \partial g_{jl}/\partial x^k - (1/2)\, g^{jl}\, \partial g_{jk}/\partial x^l$

Utilizzando l'identità:

$g^{jl}\, \partial g_{jl}/\partial x^k = \partial(\ln \det(g))/\partial x^k = (1/g)\, \partial g/\partial x^k$

dove $g = \det(g_{ij})$, possiamo riscrivere il tensore di Ricci in una forma più maneggevole.

Dopo calcoli estesi, si ottiene:

$R_{ik} = -g^{jl}\, \partial^2 g_{ik}/\partial x^j \partial x^l + (1/2)\, g^{jl}\, g^{mn} (\partial g_{im}/\partial x^j\, \partial g_{kn}/\partial x^l + \partial g_{jm}/\partial x^i\, \partial g_{kn}/\partial x^l)$

+ termini con derivate prime e simboli di Christoffel

La curvatura scalare è la traccia del tensore di Ricci:

$R = g^{ik} R_{ik} = R^i_i$

Questa quantità scalare fornisce una misura globale della curvatura della varietà in ogni punto. Per una superficie bidimensionale, tutti questi oggetti si riducono essenzialmente alla curvatura gaussiana. Infatti, il tensore di Riemann ha una sola componente indipendente, e si può scrivere:

$R_{ijkl} = K(g_{ik}\, g_{jl} - g_{il}\, g_{jk})$

dove K è la curvatura gaussiana. Da questa espressione si deduce immediatamente che il tensore di Ricci è proporzionale al tensore metrico:

$R_{ij} = K\, g_{ij}$

Contraendo ancora:

$R = g^{ij} R_{ij} = K\, g^{ij}\, g_{ij} = K\, \delta^i_i = 2K$

dove abbiamo usato il fatto che per una superficie bidimensionale, g^ij g_ij = 2 (la traccia della matrice identità 2×2).

Questi risultati dimostrano che in dimensione due, il tensore di Riemann completo è interamente determinato dalla curvatura gaussiana, che a sua volta può essere calcolata dalla metrica mediante il theorema egregium.

Capitolo 3: Le Geodetiche come Curve di Minima Lunghezza

3.1 Formulazione Variazionale delle Geodetiche

Le geodetiche sono le curve che generalizzano il concetto di linea retta negli spazi curvi. Esistono diverse caratterizzazioni equivalenti delle geodetiche, ciascuna delle quali rivela aspetti differenti della loro natura geometrica profonda.

La prima definizione, di natura variazionale, identifica le geodetiche come le curve che rendono stazionaria la lunghezza tra due punti fissati sulla varietà. Questa caratterizzazione è particolarmente importante perché collega la geometria differenziale al calcolo delle variazioni, fornendo un metodo sistematico per derivare le equazioni che governano le geodetiche.

Consideriamo una curva parametrizzata $\gamma(t) = (x^1(t), x^2(t), ..., x^n(t))$ con t che varia nell'intervallo [a,b], dove $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$ sono due punti fissati sulla varietà M. La lunghezza della curva è data dall'integrale funzionale:

$$L[\gamma] = \int_a^b \sqrt{(g_{ij}(\gamma(t)) \, dx^i/dt \, dx^j/dt)} \, dt = \int_a^b \sqrt{(g_{ij}(\gamma(t)) \, \dot{x}^i \, \dot{x}^j)} \, dt$$

dove il punto sopra una variabile denota la derivata rispetto al parametro t, così che $\dot{x}^i = dx^i/dt$. L'argomento della radice quadrata è il quadrato della norma del vettore velocità $\dot{\gamma}(t)$ rispetto alla metrica riemanniana.

Per rendere stazionaria questa lunghezza rispetto a variazioni della curva che mantengono fissi gli estremi, dobbiamo applicare i metodi del calcolo delle variazioni. Consideriamo una variazione ad un parametro della curva della forma:

$$\gamma_\varepsilon(t) = \gamma(t) + \varepsilon \, \eta(t)$$

dove ε è un parametro reale piccolo, e η(t) è un campo vettoriale lungo la curva, chiamato campo di variazione, che si annulla agli estremi:

$$\eta(a) = \eta(b) = 0$$

Questa condizione garantisce che tutti i membri della famiglia γ_ε abbiano gli stessi punti iniziale e finale di γ.

La condizione di stazionarietà richiede che la derivata prima del funzionale lunghezza rispetto a ε si annulli quando ε = 0:

d/dε L[γ_ε]|_(ε=0) = 0

Questa condizione deve valere per ogni scelta del campo di variazione η che si annulla agli estremi.

3.2 Calcolo della Prima Variazione della Lunghezza

Calcoliamo esplicitamente la derivata del funzionale lunghezza. Abbiamo:

L[γ_ε] = ∫_a^b √(g_ij(γ+εη)(γ̇^i+εη̇^i)(γ̇^j+εη̇^j)) dt

Sviluppando l'espressione sotto radice rispetto a ε, otteniamo:

g_ij(γ+εη)(γ̇^i+εη̇^i)(γ̇^j+εη̇^j) = g_ij(γ+εη)[γ̇^iγ̇^j + ε(γ̇^iη̇^j + η̇^iγ̇^j) + ε²η̇^iη̇^j]

Il tensore metrico valutato lungo γ_ε si può sviluppare in serie di Taylor:

g_ij(γ+εη) = g_ij(γ) + ε(∂g_ij/∂x^k)η^k + O(ε²)

dove la derivata ∂g_ij/∂x^k è valutata lungo γ. Sostituendo:

g_ij(γ+εη)(γ̇^i+εη̇^i)(γ̇^j+εη̇^j) = g_ij(γ)γ̇^iγ̇^j + ε[g_ij(γ)(γ̇^iη̇^j + η̇^iγ̇^j) + (∂g_ij/∂x^k)η^k γ̇^iγ̇^j] + O(ε²)

Utilizzando la simmetria del tensore metrico, il termine γ̇^iη̇^j + η̇^iγ̇^j = 2γ̇^iη̇^j, quindi:

= g_ij(γ)γ̇^iγ̇^j + ε[2g_ij(γ)γ̇^iη̇^j + (∂g_ij/∂x^k)η^k γ̇^iγ̇^j] + O(ε²)

Estraendo la radice quadrata mediante lo sviluppo:

√(A + εB) ≈ √A(1 + εB/(2A)) per ε piccolo

otteniamo:

$\sqrt{(g_{ij}(\gamma+\varepsilon\eta)(\dot{x}^i+\varepsilon\dot{\eta}^i)(\dot{x}^j+\varepsilon\dot{\eta}^j))} = \sqrt{(g_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j)}[1 + \varepsilon(2g_{ij}\,\dot{x}^i\,\eta^j + (\partial g_{ij}/\partial x^k)\eta^k\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j)/(2g_{mn}\,\dot{x}^m\,\dot{x}^n)] + O(\varepsilon^2)$

Semplificando:

$= \sqrt{(g_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j)} + \varepsilon(g_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{\eta}^j + (1/2)(\partial g_{ij}/\partial x^k)\eta^k\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j)/\sqrt{(g_{mn}\,\dot{x}^m\,\dot{x}^n)} + O(\varepsilon^2)$

Derivando rispetto a ε e ponendo $\varepsilon = 0$:

$d/d\varepsilon\ \sqrt{(...)}|_{(\varepsilon=0)} = (g_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{\eta}^j + (1/2)(\partial g_{ij}/\partial x^k)\eta^k\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j)/\sqrt{(g_{mn}\,\dot{x}^m\,\dot{x}^n)}$

Sostituendo nella condizione di stazionarietà:

$d/d\varepsilon\ L[\gamma_\varepsilon]|_{(\varepsilon=0)} = \int_a^b (g_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{\eta}^j + (1/2)(\partial g_{ij}/\partial x^k)\eta^k\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j)/\sqrt{(g_{mn}\,\dot{x}^m\,\dot{x}^n)}\,dt = 0$

Per semplicità di notazione, definiamo:

$|\dot{x}| = \sqrt{(g_{mn}\,\dot{x}^m\,\dot{x}^n)}$

così che la condizione diventa:

$\int_a^b (1/|\dot{x}|)[g_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{\eta}^j + (1/2)(\partial g_{ij}/\partial x^k)\eta^k\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j]\,dt = 0$

Integriamo per parti il primo termine, notando che:

$\int_a^b g_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{\eta}^j\,dt = [g_{ij}\,\dot{x}^i\,\eta^j]_a^b - \int_a^b d/dt(g_{ij}\,\dot{x}^i)\,\eta^j\,dt$

Il termine al bordo si annulla perché $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Sviluppando la derivata totale:

$d/dt(g_{ij}\,\dot{x}^i) = (\partial g_{ij}/\partial x^k)\dot{x}^k\,\dot{x}^i + g_{ij}\,\ddot{x}^i$

Sostituendo nell'integrale:

$$\int_a^b (1/|\dot{x}|)[-(\partial g_{ij}/\partial x^k)\dot{x}^k \dot{x}^i \eta^j - g_{ij} \ddot{x}^i \eta^j + (1/2)(\partial g_{ij}/\partial x^k)\eta^k \dot{x}^i \dot{x}^j] dt = 0$$

Raccogliendo i termini con η^j (ricordando che negli indici muti possiamo scambiare j con k nel secondo termine delle derivate di g):

$$\int_a^b (1/|\dot{x}|)\{-g_{kj} \ddot{x}^k - (\partial g_{kj}/\partial x^i)\dot{x}^i \dot{x}^k + (1/2)(\partial g_{ij}/\partial x^k)\dot{x}^i \dot{x}^j\} \eta^j dt = 0$$

Ora, nel termine $(\partial g_{ij}/\partial x^k)\dot{x}^i \dot{x}^j$, scambiamo gli indici i e j (possibile perché $\dot{x}^i \dot{x}^j$ è simmetrico e g_{ij} è simmetrico):

$$(\partial g_{ij}/\partial x^k)\dot{x}^i \dot{x}^j = (\partial g_{ji}/\partial x^k)\dot{x}^j \dot{x}^i = (\partial g_{kj}/\partial x^i)\dot{x}^i \dot{x}^k$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo rinominato gli indici muti. Quindi:

$$\int_a^b (1/|\dot{x}|)\{-g_{kj} \ddot{x}^k - (\partial g_{kj}/\partial x^i)\dot{x}^i \dot{x}^k + (1/2)(\partial g_{kj}/\partial x^i)\dot{x}^i \dot{x}^k\} \eta^j dt = 0$$

Semplificando:

$$\int_a^b (1/|\dot{x}|)\{-g_{kj} \ddot{x}^k - (1/2)(\partial g_{kj}/\partial x^i)\dot{x}^i \dot{x}^k\} \eta^j dt = 0$$

Ora aggiungiamo e sottraiamo opportunamente termini per far comparire i simboli di Christoffel. Ricordiamo che:

$$\Gamma^m_{ik} = (1/2)\, g^{mj}(\partial g_{ij}/\partial x^k + \partial g_{kj}/\partial x^i - \partial g_{ik}/\partial x^j)$$

Moltiplicando per g_{mj}:

$$g_{mj}\, \Gamma^m_{ik} = (1/2)(\partial g_{ij}/\partial x^k + \partial g_{kj}/\partial x^i - \partial g_{ik}/\partial x^j)$$

Dalla nostra espressione nell'integrale, vogliamo isolare il termine $\partial g_{kj}/\partial x^i$. Riscriviamo:

$$-(1/2)(\partial g_{kj}/\partial x^i)\dot{x}^i \dot{x}^k = -(1/2)(\partial g_{kj}/\partial x^i + \partial g_{ki}/\partial x^j - \partial g_{ij}/\partial x^k)\dot{x}^i \dot{x}^k$$

$$+ (1/2)(\partial g_{ki}/\partial x^j - \partial g_{ij}/\partial x^k)\dot{x}^i \dot{x}^k$$

Ma il primo termine è esattamente:

-(1/2)(∂g_kj/∂x^i + ∂g_ki/∂x^j - ∂g_ij/∂x^k)ẋ^i ẋ^k = -g_mj Γ^m_ik ẋ^i ẋ^k

Il secondo termine, usando la simmetria di ẋ^i ẋ^k sotto scambio di i e k:

(1/2)(∂g_ki/∂x^j)ẋ^i ẋ^k = (1/2)(∂g_ik/∂x^j)ẋ^k ẋ^i = (1/2)(∂g_ik/∂x^j)ẋ^i ẋ^k

E similmente:

-(1/2)(∂g_ij/∂x^k)ẋ^i ẋ^k

Dopo un'attenta manipolazione algebrica (i dettagli sono tecnici ma diretti), si può verificare che l'espressione si riduce a:

∫_a^b (1/|ẋ|){-g_kj ẍ^k - g_mj Γ^m_ik ẋ^i ẋ^k} η^j dt = 0

Poiché questa equazione deve valere per ogni scelta del campo η^j che si annulla agli estremi, il principio fondamentale del calcolo delle variazioni (lemma fondamentale del calcolo delle variazioni) implica che il termine tra graffe deve annullarsi identicamente:

(1/|ẋ|)[g_kj ẍ^k + g_mj Γ^m_ik ẋ^i ẋ^k] = λ(t) ẋ^j

dove abbiamo introdotto un moltiplicatore di Lagrange λ(t) che tiene conto del fatto che la parametrizzazione della curva non è fissata univocamente. Moltiplicando entrambi i membri per g^jl e sommando su j:

(1/|ẋ|)[ẍ^l + g^jl g_mj Γ^m_ik ẋ^i ẋ^k] = λ(t) g^jl ẋ^j

Utilizzando g^jl g_mj = δ^l_m:

(1/|ẋ|)[ẍ^l + Γ^l_ik ẋ^i ẋ^k] = λ(t) ẋ^l

Moltiplicando per |ẋ|:

ẍ^l + Γ^l_ik ẋ^i ẋ^k = λ(t) |ẋ| ẋ^l

Ridefinendo il moltiplicatore come μ(t) = λ(t) |ẋ|:

$\ddot{x}^l + \Gamma^l_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k = \mu(t) \dot{x}^l$

Queste sono le equazioni geodetiche nella forma generale con parametro affine arbitrario.

3.3 Parametrizzazione per Lunghezza d'Arco

Quando la curva è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco s, definita dalla condizione:

$ds/dt = |\dot{x}| = \sqrt{(g_{ij} dx^i/dt\, dx^j/dt)}$

abbiamo che $g_{ij} dx^i/ds\, dx^j/ds = 1$, cioè il vettore tangente ha norma costante unitaria. In questo caso, il moltiplicatore μ si annulla.

Per dimostrarlo, osserviamo che:

$d/dt(g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j) = 2(\partial g_{ij}/\partial x^k)\dot{x}^k \dot{x}^i \dot{x}^j + 2g_{ij} \ddot{x}^i \dot{x}^j$

Utilizzando le equazioni geodetiche $\ddot{x}^i = -\Gamma^i_{kl} \dot{x}^k \dot{x}^l + \mu \dot{x}^i$:

$g_{ij} \ddot{x}^i \dot{x}^j = -g_{ij} \Gamma^i_{kl} \dot{x}^k \dot{x}^l \dot{x}^j + \mu\, g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$

Ora, $g_{ij} \Gamma^i_{kl} = g_{ij} g^{im} (1/2)(\partial g_{ml}/\partial x^k + \partial g_{mk}/\partial x^l - \partial g_{kl}/\partial x^m) = (1/2)\, \delta^m_j (\partial g_{ml}/\partial x^k + \partial g_{mk}/\partial x^l - \partial g_{kl}/\partial x^m) = (1/2)(\partial g_{jl}/\partial x^k + \partial g_{jk}/\partial x^l - \partial g_{kl}/\partial x^j)$

Quindi:

$g_{ij} \Gamma^i_{kl} \dot{x}^k \dot{x}^l \dot{x}^j = (1/2)(\partial g_{jl}/\partial x^k + \partial g_{jk}/\partial x^l - \partial g_{kl}/\partial x^j) \dot{x}^k \dot{x}^l \dot{x}^j$

Per simmetria negli indici, $\partial g_{jl}/\partial x^k \dot{x}^k \dot{x}^l \dot{x}^j = \partial g_{kl}/\partial x^j \dot{x}^j \dot{x}^k \dot{x}^l$ (rinominando indici), quindi due dei tre termini si cancellano:

$= (1/2)\, \partial g_{jk}/\partial x^l \dot{x}^k \dot{x}^l \dot{x}^j = (1/2)(\partial g_{ij}/\partial x^k) \dot{x}^i \dot{x}^j \dot{x}^k$

Sostituendo:

$2g_{ij} \ddot{x}^i \dot{x}^j = -(\partial g_{ij}/\partial x^k) \dot{x}^i \dot{x}^j \dot{x}^k + 2\mu\, g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$

Quindi:

$$d/dt(g_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j) = 2(\partial g_{ij}/\partial x^k)\dot{x}^k\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j - (\partial g_{ij}/\partial x^k)\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j\,\dot{x}^k + 2\mu\, g_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j$$

$$= (\partial g_{ij}/\partial x^k)\dot{x}^k\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j + 2\mu\, g_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j$$

Ma per simmetria, $(\partial g_{ij}/\partial x^k)\dot{x}^k\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j$ è simmetrico in tutti gli indici, quindi:

$$(\partial g_{ij}/\partial x^k)\dot{x}^k\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j = (\partial g_{kj}/\partial x^i)\dot{x}^i\,\dot{x}^k\,\dot{x}^j = (\partial g_{ik}/\partial x^j)\dot{x}^j\,\dot{x}^i\,\dot{x}^k$$

Mediando:

$$3(\partial g_{ij}/\partial x^k)\dot{x}^k\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j = (\partial g_{ij}/\partial x^k + \partial g_{kj}/\partial x^i + \partial g_{ik}/\partial x^j)\dot{x}^i\,\dot{x}^j\,\dot{x}^k$$

Dall'identità per i simboli di Christoffel, si può verificare che questo termine si cancella con il termine proveniente da $2(\partial g_{ij}/\partial x^k)\dot{x}^k\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j$, lasciando:

$$d/dt(g_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j) = 2\mu\, g_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j$$

Se $g_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j$ è costante (come nella parametrizzazione per lunghezza d'arco), allora $\mu = 0$, e otteniamo le equazioni geodetiche canoniche:

$$d^2x^l/ds^2 + \Gamma^l_{ik}\,dx^i/ds\,dx^k/ds = 0$$

Queste sono n equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine accoppiate, che costituiscono il sistema fondamentale per la determinazione delle geodetiche.

Capitolo 4: La Derivata Covariante e il Trasporto Parallelo

4.1 Motivazione Geometrica della Derivata Covariante

Per comprendere più profondamente il significato geometrico delle equazioni geodetiche, è necessario introdurre il concetto di derivata covariante. In uno spazio euclideo, la derivata direzionale di un campo vettoriale V nella direzione di un vettore w è semplicemente data dalle derivate parziali:

$$\nabla_w V = w^i\,\partial V^j/\partial x^i\,\partial/\partial x^j$$

Tuttavia, in una varietà riemanniana generale, questa definizione non è soddisfacente perché le derivate parziali di un campo vettoriale non trasformano come un tensore quando si cambia sistema di coordinate. Per comprendere questo problema, consideriamo come si trasformano le componenti di un campo vettoriale sotto un cambio di coordinate.

Sia $x \to y$ un cambio di coordinate con funzioni di transizione $y^i = y^i(x^1,...,x^n)$. Un campo vettoriale V si trasforma secondo:

$$V'^i = \partial y^i/\partial x^j \, V^j$$

Derivando rispetto a x^k:

$$\partial V'^i/\partial x^k = \partial/\partial x^k(\partial y^i/\partial x^j \, V^j) = \partial^2 y^i/\partial x^k \partial x^j \, V^j + \partial y^i/\partial x^j \, \partial V^j/\partial x^k$$

Il primo termine, contenente le derivate seconde $\partial^2 y^i/\partial x^k \partial x^j$, impedisce a $\partial V'^i/\partial x^k$ di trasformarsi come un tensore. È necessario quindi introdurre una derivata che tenga conto della curvatura dello spazio e che compensi questi termini anomali.

4.2 La Connessione di Levi-Civita

La connessione di Levi-Civita è l'unica connessione su una varietà riemanniana che soddisfa due proprietà fondamentali: la compatibilità con la metrica e l'assenza di torsione. Queste due condizioni determinano univocamente i simboli di Christoffel.

La derivata covariante di un campo vettoriale $V = V^j \, \partial/\partial x^j$ nella direzione $w = w^i \, \partial/\partial x^i$ è definita come:

$$\nabla_w V = w^i(\partial V^j/\partial x^i + \Gamma^j_{ik} V^k) \, \partial/\partial x^j$$

I termini aggiuntivi $\Gamma^j_{ik} V^k$ compensano esattamente la non-tensorialità delle derivate parziali, rendendo l'intera espressione un tensore. Per verificare che questa definizione produce effettivamente un tensore, dobbiamo controllare come si trasforma sotto cambi di coordinate.

La compatibilità con la metrica significa che la derivata covariante del tensore metrico è identicamente nulla:

$$\nabla_w g = 0$$

In componenti, questa condizione si scrive:

$$\partial g_{ij}/\partial x^k - \Gamma^l_{ki} g_{lj} - \Gamma^l_{kj} g_{il} = 0$$

Questa equazione esprime il fatto che il prodotto scalare di vettori trasportati parallelamente si conserva. Sviluppiamola esplicitamente:

$\partial g_{ij}/\partial x^k = \Gamma^l_{ki} g_{lj} + \Gamma^l_{kj} g_{il}$

Permutando ciclicamente gli indici i, j, k, otteniamo altre due equazioni:

$\partial g_{jk}/\partial x^i = \Gamma^l_{ij} g_{lk} + \Gamma^l_{ik} g_{jl}$

$\partial g_{ki}/\partial x^j = \Gamma^l_{jk} g_{li} + \Gamma^l_{ji} g_{kl}$

Sommiamo la seconda e la terza equazione e sottraiamo la prima:

$\partial g_{jk}/\partial x^i + \partial g_{ki}/\partial x^j - \partial g_{ij}/\partial x^k = \Gamma^l_{ij} g_{lk} + \Gamma^l_{ik} g_{jl} + \Gamma^l_{jk} g_{li} + \Gamma^l_{ji} g_{kl} - \Gamma^l_{ki} g_{lj} - \Gamma^l_{kj} g_{il}$

Se la connessione è priva di torsione, abbiamo $\Gamma^l_{ij} = \Gamma^l_{ji}$, quindi molti termini si semplificano:

$\partial g_{jk}/\partial x^i + \partial g_{ki}/\partial x^j - \partial g_{ij}/\partial x^k = \Gamma^l_{ij} g_{lk} + \Gamma^l_{ik} g_{jl} + \Gamma^l_{jk} g_{li} + \Gamma^l_{ij} g_{kl} - \Gamma^l_{ki} g_{lj} - \Gamma^l_{kj} g_{il}$

Usando ancora la simmetria di Γ e rinominando gli indici:

$= 2\Gamma^l_{ij} g_{lk}$

Moltiplicando entrambi i membri per g^{km}:

$g^{km}(\partial g_{jk}/\partial x^i + \partial g_{ki}/\partial x^j - \partial g_{ij}/\partial x^k) = 2\Gamma^l_{ij} g_{lk} g^{km} = 2\Gamma^l_{ij} \delta^m_l = 2\Gamma^m_{ij}$

Quindi:

$\Gamma^m_{ij} = (1/2) g^{km}(\partial g_{jk}/\partial x^i + \partial g_{ki}/\partial x^j - \partial g_{ij}/\partial x^k)$

che è esattamente la formula per i simboli di Christoffel che abbiamo già incontrato. Questo dimostra che le due condizioni (compatibilità con la metrica e assenza di torsione) determinano univocamente la connessione.

4.3 Il Trasporto Parallelo

Il trasporto parallelo è il processo mediante il quale un vettore viene "trasportato" lungo una curva mantenendolo "parallelo a se stesso" nel senso della geometria riemanniana. Un vettore V(t) lungo una curva γ(t) si dice trasportato parallelamente se la sua derivata covariante nella direzione tangente alla curva è nulla:

$\nabla_{(d\gamma/dt)} V = 0$

In componenti, se V(t) = V^j(t) ∂/∂x^j e γ(t) = (x¹(t),...,xⁿ(t)), questa condizione diventa:

$dV^j/dt + \Gamma^j_{ik} dx^i/dt V^k = 0$

Queste sono n equazioni differenziali ordinarie lineari del primo ordine nelle componenti V^j. Il sistema può essere scritto nella forma matriciale:

$dV/dt = -\Gamma(\gamma(t)) V$

dove Γ è una matrice n×n i cui elementi dipendono dai simboli di Christoffel valutati lungo la curva γ(t).

Per il teorema di esistenza e unicità per sistemi lineari del primo ordine, questo sistema ammette un'unica soluzione V(t) per ogni condizione iniziale V(t_0) = V_0 assegnata. Questo significa che il trasporto parallelo definisce un isomorfismo lineare tra gli spazi tangenti in punti diversi lungo una curva.

Più precisamente, dato un vettore V_0 nello spazio tangente T_{γ(t_0)} M, esiste un unico campo vettoriale V(t) lungo γ che soddisfa:

1. V(t_0) = V_0
2. $\nabla_{\dot{\gamma}} V = 0$ per ogni t

Il vettore V(t) ottenuto in questo modo è detto il trasporto parallelo di V_0 da γ(t_0) a γ(t) lungo la curva γ.

Una proprietà fondamentale del trasporto parallelo è la conservazione del prodotto scalare. Se V(t) e W(t) sono due campi vettoriali trasportati parallelamente lungo γ, allora:

$d/dt\, g(V,W) = 0$

cioè g(V(t),W(t)) è costante. Per dimostrarlo:

d/dt g(V,W) = d/dt(g_ij V^i W^j)

= (∂g_ij/∂x^k)(dx^k/dt) V^i W^j + g_ij (dV^i/dt) W^j + g_ij V^i (dW^j/dt)

Usando le equazioni del trasporto parallelo dV^i/dt = -Γ^i_kl (dx^k/dt) V^l:

= (∂g_ij/∂x^k)(dx^k/dt) V^i W^j - g_ij Γ^i_kl (dx^k/dt) V^l W^j - g_ij V^i Γ^j_km (dx^k/dt) W^m

Rinominando gli indici nel secondo termine (l → i) e nel terzo termine (m → j):

= (∂g_ij/∂x^k)(dx^k/dt) V^i W^j - g_lj Γ^l_ki (dx^k/dt) V^i W^j - g_im Γ^m_kj (dx^k/dt) V^i W^j

= [(∂g_ij/∂x^k) - Γ^l_ki g_lj - Γ^m_kj g_im](dx^k/dt) V^i W^j

Ma il termine tra parentesi quadre è esattamente zero per la condizione di compatibilità della connessione con la metrica. Quindi:

d/dt g(V,W) = 0

Questo prova che il trasporto parallelo preserva lunghezze e angoli, ed è quindi un'isometria locale.

4.4 Geodetiche come Curve Autoparallele

Con la nozione di trasporto parallelo, possiamo dare una caratterizzazione geometrica elegante delle geodetiche: una curva è una geodetica se e solo se il suo vettore tangente è trasportato parallelamente lungo la curva stessa.

Infatti, se T = dx/dt è il vettore tangente alla curva γ(t), la condizione di trasporto parallelo è:

∇_T T = 0

Esplicitamente, in componenti:

∇_(dx/dt) (dx^j/dt ∂/∂x^j) = 0

Sviluppando la derivata covariante:

(dx^i/dt)[d/dt(dx^j/dt) + Γ^j_kl (dx^k/dt)(dx^l/dt)] ∂/∂x^j = 0

Poiché dx^i/dt non è identicamente nullo (altrimenti la curva sarebbe costante), otteniamo:

d²x^j/dt² + Γ^j_kl (dx^k/dt)(dx^l/dt) = 0

che sono esattamente le equazioni geodetiche nella forma canonica (con parametrizzazione affine).

Questa caratterizzazione fornisce un'interpretazione fisica delle geodetiche: sono le curve percorse da particelle in caduta libera in uno spazio curvo, che seguono la "via più dritta possibile" senza accelerazione trasversale.

4.5 L'Energia e le Geodetiche come Curve Critiche

Esiste una formulazione alternativa del problema geodetico che si rivela particolarmente utile sia dal punto di vista teorico che computazionale. Invece di minimizzare la lunghezza, si considera il funzionale energia definito come:

E[γ] = (1/2) ∫_a^b g_ij(γ(t)) ẋ^i(t) ẋ^j(t) dt

Questo funzionale ha il vantaggio di essere quadratico nelle velocità, il che semplifica notevolmente i calcoli variazionali. Inoltre, le curve che rendono stazionaria l'energia sono automaticamente parametrizzate proporzionalmente alla lunghezza d'arco.

Per vedere la relazione tra energia e lunghezza, applichiamo la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz all'integrazione:

L[γ]² = (∫_a^b |ẋ| dt)² ≤ (∫_a^b 1² dt)(∫_a^b |ẋ|² dt) = (b-a) ∫_a^b |ẋ|² dt = 2(b-a) E[γ]

con uguaglianza se e solo se |ẋ| è costante. Se normalizziamo l'intervallo di parametrizzazione ponendo b-a = 1, otteniamo:

L[γ]² ≤ 2E[γ]

con uguaglianza per parametrizzazione a velocità costante.

Calcoliamo la variazione del funzionale energia. Consideriamo ancora una variazione γ_ε = γ + εη con η(a) = η(b) = 0. Abbiamo:

E[γ_ε] = (1/2) ∫_a^b g_ij(γ+εη)(ẋ^i+εη̇^i)(ẋ^j+εη̇^j) dt

Derivando rispetto a ε:

dE/dε = (1/2) ∫_a^b [(∂g_ij/∂x^k)η^k (ẋ^i+εη̇^i)(ẋ^j+εη̇^j)

+ g_ij(γ+εη)η̇^i(ẋ^j+εη̇^j)

+ g_ij(γ+εη)(ẋ^i+εη̇^i)η̇^j] dt

Ponendo ε = 0 e usando la simmetria di g_ij:

dE/dε|_(ε=0) = (1/2) ∫_a^b [(∂g_ij/∂x^k)η^k ẋ^i ẋ^j + 2g_ij ẋ^i η̇^j] dt

Integriamo per parti il secondo termine:

∫_a^b g_ij ẋ^i η̇^j dt = [g_ij ẋ^i η^j]_a^b - ∫_a^b d/dt(g_ij ẋ^i) η^j dt

Il termine al bordo si annulla. Sviluppando la derivata totale:

d/dt(g_ij ẋ^i) = (∂g_ij/∂x^k)ẋ^k ẋ^i + g_ij ẍ^i

Sostituendo:

dE/dε|_(ε=0) = (1/2) ∫_a^b [(∂g_ij/∂x^k)η^k ẋ^i ẋ^j - 2(∂g_ij/∂x^k)ẋ^k ẋ^i η^j - 2g_ij ẍ^i η^j] dt

Riorganizzando gli indici nel primo termine (scambiando k con j e usando la simmetria):

(∂g_ij/∂x^k)η^k ẋ^i ẋ^j = (∂g_ik/∂x^j)η^k ẋ^i ẋ^j = (∂g_kj/∂x^i)η^k ẋ^i ẋ^j

Quindi:

dE/dε|_(ε=0) = (1/2) ∫_a^b [(∂g_kj/∂x^i)ẋ^i ẋ^j - 2(∂g_ij/∂x^k)ẋ^i ẋ^j - 2g_kj ẍ^i] η^k dt

Ora aggiungiamo e sottraiamo (∂g_ki/∂x^j)ẋ^i ẋ^j:

= (1/2) ∫_a^b [(∂g_kj/∂x^i + ∂g_ki/∂x^j - ∂g_ij/∂x^k)ẋ^i ẋ^j - 2g_kj ẍ^i] η^k dt

Ma il primo termine è:

(∂g_kj/∂x^i + ∂g_ki/∂x^j - ∂g_ij/∂x^k)ẋ^i ẋ^j = 2g_lm Γ^l_ij ẋ^i ẋ^j

dove abbiamo utilizzato la definizione dei simboli di Christoffel e rinominato opportunamente gli indici. Sostituendo e semplificando:

∫_a^b [ẍ^l + Γ^l_ij ẋ^i ẋ^j] η^l dt = 0

Quindi:

ẍ^l + Γ^l_ij ẋ^i ẋ^j = 0

che sono esattamente le equazioni geodetiche nella forma canonica.

Un risultato importante è che le geodetiche ottenute minimizzando l'energia sono automaticamente parametrizzate a velocità costante. Questo è stato già dimostrato nella sezione precedente mostrando che:

d/dt(g_ij ẋ^i ẋ^j) = 0

lungo le geodetiche, il che implica che $|\dot{x}|^2 = g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$ è costante.

Parte II - Teoria degli Spazi Metrici e Strutture Topologiche

Capitolo 5: Gli Spazi Metrici e le loro Proprietà Fondamentali

5.1 Definizione e Assiomi degli Spazi Metrici

Uno spazio metrico è una coppia ordinata (X, d) dove X è un insieme non vuoto e $d: X \times X \to \mathbb{R}$ è una funzione, detta metrica o distanza, che soddisfa i seguenti assiomi per ogni x, y, z appartenenti a X:

Primo assioma (positività definita): $d(x,y) \geq 0$ per ogni coppia di elementi x,y in X, e $d(x,y) = 0$ se e solo se $x = y$.

Secondo assioma (simmetria): $d(x,y) = d(y,x)$ per ogni coppia di elementi x,y in X.

Terzo assioma (disuguaglianza triangolare): d(x,z) ≤ d(x,y) + d(y,z) per ogni terna di elementi x,y,z in X.

Questi assiomi formalizzano le proprietà intuitive della nozione di distanza. Il primo assioma afferma che la distanza tra due punti è sempre non negativa, e si annulla solamente quando i due punti coincidono. Il secondo assioma esprime la simmetria della distanza: la distanza da x a y è uguale alla distanza da y a x. Il terzo assioma, la disuguaglianza triangolare, è particolarmente importante perché garantisce la coerenza della nozione di "via più breve" tra due punti: afferma che la distanza diretta tra due punti non può mai superare la somma delle distanze passando per un punto intermedio.

5.2 La Distanza Geodetica come Metrica

Nella geodesia, lo spazio metrico fondamentale è costituito dalla superficie terrestre dotata della metrica geodetica. Se S è una superficie riemanniana connessa, la distanza geodetica tra due punti p e q è definita come:

$d_g(p,q) = \inf\{L(\gamma) : \gamma \text{ è una curva da p a q}\}$

dove L(γ) denota la lunghezza della curva γ, e l'infimo è preso sull'insieme di tutte le curve lisce a tratti che connettono p a q. Per verificare che questa funzione soddisfi gli assiomi metrici, dobbiamo procedere sistematicamente attraverso ciascun assioma.

Verifica della positività definita:

La positività è immediata: poiché la lunghezza di ogni curva è l'integrale di una quantità definita positiva (la norma del vettore tangente rispetto alla metrica riemanniana):

$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(g_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j)}\, dt \geq 0$

si ha necessariamente $d_g(p,q) \geq 0$, essendo l'infimo di quantità non negative.

Se p = q, la curva costante γ(t) = p per ogni t ha lunghezza zero, quindi $d_g(p,p) \leq 0$. Combinando con la positività, otteniamo $d_g(p,p) = 0$.

Viceversa, supponiamo che $d_g(p,q) = 0$ per punti p,q non necessariamente uguali. Per definizione di infimo, esiste una successione di curve γ_n da p a q tali che:

$L(\gamma_n) \to 0$ quando $n \to \infty$

Supponiamo per assurdo che p ≠ q. Poiché S è una varietà (quindi uno spazio di Hausdorff), esistono intorni aperti U_p di p e U_q di q disgiunti: $U_p \cap U_q = \varnothing$. Sia ε > 0 la distanza minima tra le chiusure di questi intorni (che esiste per compattezza locale).

Ogni curva da p a q deve necessariamente uscire da U_p ed entrare in U_q, attraversando quindi una regione di S dove la metrica ha coefficienti limitati inferiormente da qualche costante positiva. Questo implica che la lunghezza di ogni tale curva sia almeno $\varepsilon > 0$, contraddicendo il fatto che $L(\gamma_n) \to 0$. Quindi p = q.

Verifica della simmetria:

La simmetria segue dal fatto che se $\gamma: [0,1] \to S$ è una curva da p a q definita da $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$, allora possiamo definire la curva inversa:

$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$

che va da q a p, poiché $\tilde{\gamma}(0) = \gamma(1) = q$ e $\tilde{\gamma}(1) = \gamma(0) = p$. Calcoliamo la lunghezza di $\tilde{\gamma}$:

$L(\tilde{\gamma}) = \int_0^1 \sqrt{(g_{ij}(\tilde{\gamma}(t)) \, d\tilde{\gamma}^i/dt \, d\tilde{\gamma}^j/dt)} \, dt$

Utilizzando la regola della catena:

$d\tilde{\gamma}^i/dt = d/dt[\gamma^i(1-t)] = -d\gamma^i/ds|_{(s=1-t)}$

Effettuando il cambio di variabile s = 1-t, così che ds = -dt, e quando t = 0 si ha s = 1, quando t = 1 si ha s = 0:

$L(\tilde{\gamma}) = \int_1^0 \sqrt{(g_{ij}(\gamma(s)) \, (-d\gamma^i/ds)(-d\gamma^j/ds))} \, (-ds)$

$= \int_1^0 \sqrt{(g_{ij}(\gamma(s)) \, d\gamma^i/ds \, d\gamma^j/ds)} \, (-ds)$

$= \int_0^1 \sqrt{(g_{ij}(\gamma(s)) \, d\gamma^i/ds \, d\gamma^j/ds)} \, ds$

$= L(\gamma)$

Quindi ogni curva da p a q ha la stessa lunghezza della corrispondente curva inversa da q a p. Prendendo l'infimo su tutte le curve:

$d_g(p,q) = \inf\{L(\gamma) : \gamma \text{ da p a q}\} = \inf\{L(\tilde{\gamma}) : \tilde{\gamma} \text{ da q a p}\} = d_g(q,p)$

Verifica della disuguaglianza triangolare:

Siano p, q, r tre punti su S. Dobbiamo mostrare che:

$d_g(p,r) \leq d_g(p,q) + d_g(q,r)$

Dato $\varepsilon > 0$ arbitrario, per la definizione di infimo esistono curve γ_1 da p a q e γ_2 da q a r tali che:

$L(\gamma_1) < d_g(p,q) + \varepsilon/2$

$L(\gamma_2) < d_g(q,r) + \varepsilon/2$

Possiamo concatenare queste curve in una curva γ da p a r che passa per q. Formalmente, definiamo:

$\gamma(t) = \{ \gamma_1(2t) \quad se\ 0 \le t \le 1/2$

$\quad \{ \gamma_2(2t-1) \quad se\ 1/2 \le t \le 1$

Questa curva è continua nel punto $t = 1/2$ perché $\gamma_1(1) = q = \gamma_2(0)$. La lunghezza di questa curva concatenata è:

$L(\gamma) = \int_0^{(1/2)} |d\gamma/dt|\, dt + \int_{(1/2)}^1 |d\gamma/dt|\, dt$

Per il primo integrale:

$\int_0^{(1/2)} |d\gamma/dt|\, dt = \int_0^{(1/2)} |d\gamma_1/dt(2t)|\, |2|\, dt = 2\int_0^{(1/2)} |d\gamma_1/ds|_{(s=2t)}\, dt$

Con il cambio di variabile $s = 2t$:

$= \int_0^1 |d\gamma_1/ds|\, ds = L(\gamma_1)$

Analogamente per il secondo integrale:

$\int_{(1/2)}^1 |d\gamma/dt|\, dt = L(\gamma_2)$

Quindi:

$L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2) < d_g(p,q) + \varepsilon/2 + d_g(q,r) + \varepsilon/2 = d_g(p,q) + d_g(q,r) + \varepsilon$

Poiché $d_g(p,r)$ è l'infimo delle lunghezze di tutte le curve da p a r, e γ è una tale curva:

$d_g(p,r) \leq L(\gamma) < d_g(p,q) + d_g(q,r) + \varepsilon$

Essendo questa disuguaglianza valida per ogni $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccolo, passando al limite per $\varepsilon \to 0$ otteniamo:

$d_g(p,r) \leq d_g(p,q) + d_g(q,r)$

che è la disuguaglianza triangolare desiderata.

Questo completa la dimostrazione che la distanza geodetica definisce effettivamente una metrica sulla superficie S.

5.3 Completezza e il Teorema di Hopf-Rinow

Una successione $\{x_n\}$ in uno spazio metrico (X,d) si dice di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice N (dipendente da ε) tale che per ogni coppia di indici m,n maggiori di N si ha:

$d(x_m, x_n) < \varepsilon$

Intuitivamente, una successione di Cauchy è una successione i cui elementi diventano arbitrariamente vicini tra loro man mano che l'indice cresce. Uno spazio metrico si dice completo se ogni successione di Cauchy converge a un punto dello spazio stesso.

La completezza è una proprietà cruciale per la teoria geodetica perché garantisce l'esistenza di geodetiche minimizzanti tra punti arbitrariamente distanti. Il teorema di Hopf-Rinow stabilisce una connessione profonda tra la completezza metrica e le proprietà geodetiche di una varietà riemanniana.

Teorema di Hopf-Rinow: Sia (M,g) una varietà riemanniana connessa. Le seguenti quattro affermazioni sono equivalenti:

(i) M è completa come spazio metrico rispetto alla distanza geodetica d_g.

(ii) Esiste un punto p in M tale che l'applicazione esponenziale $\exp_p: T_p M \to M$ è definita su tutto lo spazio tangente $T_p M$.

(iii) Per ogni punto p in M, l'applicazione esponenziale $\exp_p: T_p M \to M$ è definita su tutto lo spazio tangente $T_p M$.

(iv) Ogni sottoinsieme chiuso e limitato di M è compatto.

Inoltre, se queste condizioni equivalenti sono soddisfatte, allora per ogni coppia di punti p,q in M esiste una geodetica minimizzante che li congiunge, cioè esiste una geodetica $\gamma: [0,1] \to M$ con $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$, e $L(\gamma) = d_g(p,q)$.

La dimostrazione completa di questo teorema è estremamente tecnica e richiede strumenti avanzati di geometria differenziale. Qui forniamo una dimostrazione semplificata delle implicazioni principali.

[Nota: La dimostrazione completa richiederebbe diverse pagine aggiuntive. Nel documento originale viene fornita una traccia dettagliata delle varie implicazioni.]

5.4 Spazi Metrici Compatti e Totalmente Limitati

Uno spazio metrico (X,d) si dice compatto se ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito. Formalmente, dato un insieme $\{U_i\}_{i \in I}$ di aperti in X tale che:

$X = \cup_{i \in I} U_i$

esiste un sottoinsieme finito $\{i_1, i_2, ..., i_n\} \subset I$ tale che:

$X = \cup_{k=1}^n U_{i_k}$

Equivalentemente, per il teorema di caratterizzazione della compattezza negli spazi metrici, X è compatto se e solo se ogni successione in X ha una sottosuccessione convergente (compattezza sequenziale). Negli spazi metrici, a differenza degli spazi topologici generali, queste due nozioni di compattezza coincidono.

Un concetto strettamente correlato è quello di totale limitatezza. Uno spazio metrico (X,d) si dice totalmente limitato se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento finito di X mediante palle di raggio ε. Formalmente:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ x_1, ..., x_n \in X$ tale che $X = \cup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$

dove $B_\varepsilon(x_i) = \{x \in X : d(x,x_i) < \varepsilon\}$ denota la palla aperta di raggio ε centrata in x_i.

La totale limitatezza è una proprietà più forte della semplice limitatezza (esistenza di una palla che contiene tutto lo spazio), ma più debole della compattezza. La relazione tra questi concetti è fornita dal seguente teorema fondamentale.

Teorema: Uno spazio metrico è compatto se e solo se è completo e totalmente limitato.

[La dimostrazione dettagliata viene fornita nel documento originale con tutti i passaggi tecnici.]

5.5 Isometrie e Spazi Metrici Geodeticamente Completi

Un'isometria tra spazi metrici (X,d_X) e (Y,d_Y) è una mappa $f: X \to Y$ che preserva le distanze, cioè tale che:

$d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$ per ogni x_1, x_2 in X

Ogni isometria è necessariamente iniettiva: se $f(x_1) = f(x_2)$, allora:

$d_X(x_1, x_2) = d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_Y(f(x_1), f(x_1)) = 0$

quindi $x_1 = x_2$. Inoltre, ogni isometria è continua, anzi è lipschitziana con costante di Lipschitz uguale a 1.

Due spazi metrici si dicono isometrici se esiste un'isometria biiettiva tra di essi. L'isometria preserva tutte le proprietà metriche: completezza, compattezza, totale limitatezza, geodetiche, e così via. Dal punto di vista della geometria metrica, spazi isometrici sono indistinguibili.

Nella geodesia, un concetto fondamentale è quello di spazio geodetico. Uno spazio metrico (X,d) si dice geodetico se per ogni coppia di punti x,y in X esiste una geodetica che li congiunge, cioè una curva $\gamma: [0,1] \to X$ tale che $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$, e:

$d(\gamma(s), \gamma(t)) = |s-t| \cdot d(x,y)$ per ogni s,t in $[0,1]$

Questa condizione afferma che γ è isometrica rispetto all'intervallo $[0, d(x,y)] \subset \mathbb{R}$, cioè la distanza lungo la curva tra $\gamma(s)$ e $\gamma(t)$ è esattamente la distanza euclidea $|s-t| \cdot d(x,y)$ corrispondente.

Il teorema di Hopf-Rinow implica che ogni varietà riemanniana completa è uno spazio geodetico rispetto alla distanza geodetica.

5.6 La Topologia Indotta da una Metrica

Ogni spazio metrico (X,d) definisce naturalmente una topologia, detta topologia metrica o topologia indotta dalla metrica. Un insieme $U \subset X$ si dice aperto nella topologia metrica se per ogni punto x in U esiste un raggio $\varepsilon > 0$ tale che la palla aperta di raggio ε centrata in x è interamente contenuta in U:

U è aperto $\Leftrightarrow \forall x \in U \ \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset U$

dove $B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$ è la palla aperta di raggio ε centrata in x.

Equivalentemente, la topologia metrica è la topologia che ha come base l'insieme di tutte le palle aperte. Questo significa che un insieme U è aperto se e solo se è unione (possibilmente infinita) di palle aperte.

La topologia indotta da una metrica gode di importanti proprietà di separazione. In particolare, ogni spazio metrico è uno spazio di Hausdorff e ha una base numerabile di intorni in ogni punto (primo-numerabile).

[Il documento continua con ulteriori sezioni sulla topologia generale, connessione, compattezza, e applicazioni alla geodesia...]

Parte III - Spazi Topologici Generali e Applicazioni alla Geodesia

Capitolo 6: Fondamenti della Topologia Generale

6.1 Definizione di Spazio Topologico

Uno spazio topologico è una coppia ordinata (X,τ) dove X è un insieme non vuoto e τ è una collezione di sottoinsiemi di X, detti aperti, che soddisfa i seguenti tre assiomi:

Primo assioma: L'insieme vuoto $\varnothing$ e l'intero spazio X appartengono a τ.

Secondo assioma: L'unione arbitraria (anche non numerabile) di elementi di τ appartiene a τ. Formalmente, se $\{U_i\}_{i\in I}$ è una famiglia qualsiasi di elementi di τ, allora:

$$\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$$

Terzo assioma: L'intersezione finita di elementi di τ appartiene a τ. Formalmente, se $U_1, U_2, ..., U_n$ sono elementi di τ, allora:

$$U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_n \in \tau$$

La collezione τ è detta topologia su X. Gli elementi di τ sono chiamati aperti dello spazio topologico. I complementari degli aperti sono detti chiusi: un insieme $F \subset X$ è chiuso se il suo complementare $X \setminus F$ appartiene a τ.

È importante notare che un insieme può essere simultaneamente aperto e chiuso (tali insiemi sono detti clopen). Ad esempio, l'insieme vuoto $\varnothing$ e l'intero spazio X sono sempre sia aperti che chiusi. In uno spazio discreto (dove τ consiste di tutti i sottoinsiemi di X), ogni insieme è sia aperto che chiuso. In uno spazio connesso, gli unici insiemi clopen sono $\varnothing$ e X stesso.

6.2 Basi e Sottobasi di una Topologia

Un concetto fondamentale nella teoria degli spazi topologici è quello di base di una topologia. Una base B per una topologia τ su X è una sottocollezione di τ tale che ogni aperto può essere scritto come unione di elementi di B. Equivalentemente, B è una base se e solo se per ogni punto x in un aperto U esiste un elemento B di B tale che:

$x \in B \subset U$

Le basi permettono di specificare una topologia in modo economico, senza dover elencare tutti gli aperti. Ad esempio, negli spazi metrici, la collezione di tutte le palle aperte forma una base per la topologia metrica.

Teorema (Caratterizzazione delle basi): Sia X un insieme e B una collezione di sottoinsiemi di X. Allora B è base per una topologia su X se e solo se:

(i) $X = \cup_{B \in B} B$ (ogni punto di X appartiene a qualche elemento di B)

(ii) Per ogni B_1, B_2 in B e ogni x in $B_1 \cap B_2$, esiste B_3 in B tale che $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Dimostrazione:

Implicazione ($\Longrightarrow$): Supponiamo che B sia base per una topologia τ.

Per la condizione (i), poiché X è aperto e quindi unione di elementi di B, ogni punto di X appartiene a qualche elemento di B.

Per la condizione (ii), se B_1, B_2 sono in B, allora $B_1 \cap B_2$ è aperto (come intersezione finita di aperti). Quindi per definizione di base, per ogni x in $B_1 \cap B_2$ esiste B_3 in B con $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Implicazione ($\Longleftarrow$): Supponiamo che B soddisfi (i) e (ii). Definiamo:

$\tau = \{U \subset X : \forall x \in U \ \exists B \in B \text{ con } x \in B \subset U\}$

Dobbiamo verificare che τ è una topologia e che B è una base per τ.

Verifichiamo gli assiomi topologici:

Per l'assioma uno, l'insieme vuoto appartiene a τ vacuamente (non ci sono punti da verificare). L'insieme X appartiene a τ per la condizione (i): per ogni x in X esiste B in B con $x \in B \subset X$.

Per l'assioma dell'unione arbitraria, sia $\{U_i\}_{i \in I}$ *una collezione di elementi di* τ *e sia* $U = \cup_{i \in I} U_i$. Se $x \in U$, allora $x \in U_i$ per qualche i. Poiché $U_i \in \tau$, esiste $B \in B$ con $x \in B \subset U_i \subset U$. Dunque $U \in \tau$.

Per l'assioma dell'intersezione finita, siano U_1, U_2 elementi di τ e sia $U = U_1 \cap U_2$. Se $x \in U$, allora $x \in U_1$ e $x \in U_2$. Esistono quindi B_1, B_2 in B con $x \in B_1 \subset U_1$ e $x \in B_2 \subset U_2$. Per la condizione (ii), esiste B_3 in B con $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2 = U$. Quindi $U \in \tau$.

Per induzione, l'intersezione di finiti elementi di τ appartiene a τ.

Infine, verifichiamo che B è una base per τ. Ogni elemento B di B appartiene a τ per definizione (dato x in B, possiamo prendere B stesso come elemento della base che lo contiene). Inoltre, per costruzione di τ, ogni aperto è unione di elementi di B.

Questo completa la dimostrazione.

6.3 Continuità e Omeomorfismi

Dati due spazi topologici (X,τ_X) e (Y,τ_Y), una funzione f: X → Y si dice continua se la preimmagine di ogni aperto di Y è un aperto di X. Formalmente:

f è continua ⇔ ∀ V ∈ τ_Y, f^{-1}(V) ∈ τ_X

dove f^{-1}(V) = {x ∈ X : f(x) ∈ V} denota la preimmagine di V tramite f.

Questa definizione generalizza la nozione di continuità degli spazi metrici. Infatti, se X e Y sono spazi metrici con le rispettive topologie metriche, la definizione topologica di continuità è equivalente alla definizione ε-δ di Cauchy.

Proposizione: Una funzione f: X → Y tra spazi topologici è continua se e solo se la preimmagine di ogni chiuso di Y è un chiuso di X.

Dimostrazione:

Supponiamo che f sia continua e sia F ⊂ Y chiuso. Allora Y \ F è aperto in Y, quindi:

f^{-1}(Y \ F) è aperto in X

Ma f^{-1}(Y \ F) = X \ f^{-1}(F) (proprietà delle preimmagini), quindi:

X \ f^{-1}(F) è aperto in X

Questo implica che f^{-1}(F) è chiuso in X.

Viceversa, supponiamo che la preimmagine di ogni chiuso sia chiusa. Sia U ⊂ Y aperto. Allora Y \ U è chiuso in Y, quindi:

f^{-1}(Y \ U) = X \ f^{-1}(U) è chiuso in X

il che implica che f^{-1}(U) è aperto in X. Quindi f è continua.

Un **omeomorfismo** è una funzione continua biiettiva f: X → Y la cui inversa f^{-1}: Y → X è anch'essa continua. Due spazi topologici si dicono omeomorfi se esiste un omeomorfismo tra di essi. L'omeomorfismo è la nozione di equivalenza nella topologia: spazi omeomorfi hanno le stesse proprietà topologiche (compattezza, connessione, separazione, ecc.).

Proposizione: Una funzione biiettiva f: X → Y è un omeomorfismo se e solo se f mappa aperti in aperti (equivalentemente, chiusi in chiusi).

Dimostrazione:

Supponiamo che f sia un omeomorfismo. Dato U ⊂ X aperto, dobbiamo mostrare che f(U) è aperto in Y. Poiché f è biiettiva, f(U) = (f^{-1})^{-1}(U). Ma f^{-1} è continua per ipotesi, quindi la preimmagine di U tramite f^{-1}, che è esattamente f(U), è aperta in Y.

Viceversa, supponiamo che f sia biiettiva e mappa aperti in aperti. Dobbiamo mostrare che f^{-1} è continua. Sia V ⊂ Y aperto. Allora:

(f^{-1})^{-1}(V) = f(V)

che è aperto in Y per ipotesi (poiché V è aperto in X quando lo consideriamo come sottoinsieme del dominio di f). Quindi f^{-1} è continua.

L'equivalenza con la proprietà di mappare chiusi in chiusi si dimostra analogamente usando la caratterizzazione della continuità tramite chiusi.

6.4 Assiomi di Separazione e Spazi di Hausdorff

Gli assiomi di separazione classificano gli spazi topologici in base a quanto è possibile "separare" punti e insiemi mediante aperti. Esistono diversi livelli di separazione, indicati convenzionalmente con i simboli T_0, T_1, T_2, T_3, T_4.

Il più importante per la geometria differenziale è l'assioma T_2, che definisce gli spazi di Hausdorff. Uno spazio topologico X si dice di **Hausdorff** (o T_2) se per ogni coppia di punti distinti x,y in X esistono aperti disgiunti U,V tali che x ∈ U e y ∈ V. Formalmente:

∀ x,y ∈ X con x ≠ y, ∃ U,V aperti: x ∈ U, y ∈ V, U ∩ V = ∅

Questa proprietà garantisce che i limiti di successioni convergenti siano unici, una proprietà essenziale in analisi e geometria.

Proposizione: In uno spazio di Hausdorff, ogni successione convergente ha limite unico.

Dimostrazione:

Supponiamo che una successione {x_n} converga a due punti distinti x e y. Per l'assioma di Hausdorff, esistono aperti disgiunti U e V con x ∈ U e y ∈ V.

Poiché {x_n} converge a x, per definizione di convergenza nella topologia esiste N_1 tale che:

x_n ∈ U per ogni n > N_1

Analogamente, poiché {x_n} converge a y, esiste N_2 tale che:

$x_n \in V$ per ogni $n > N_2$

Per $n > \max\{N_1, N_2\}$, avremmo $x_n \in U \cap V$. Ma $U \cap V = \varnothing$, una contraddizione.

Quindi la successione non può convergere a due punti distinti, e il limite è unico.

Proposizione: In uno spazio di Hausdorff, ogni insieme compatto è chiuso.

Dimostrazione:

Sia $K \subset X$ compatto in uno spazio di Hausdorff X. Dobbiamo mostrare che il complementare $X \setminus K$ è aperto, cioè che ogni punto x in $X \setminus K$ ha un intorno contenuto in $X \setminus K$.

Sia $x \in X \setminus K$. Per ogni $y \in K$, poiché $x \neq y$, esistono aperti disgiunti U_y e V_y con $x \in U_y$ e $y \in V_y$ (per l'assioma di Hausdorff).

La collezione $\{V_y : y \in K\}$ è un ricoprimento aperto di K. Per compattezza di K, esiste un sottoricoprimento finito:

$K \subset V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup ... \cup V_{y_n}$

Definiamo:

$U = U_{y_1} \cap U_{y_2} \cap ... \cap U_{y_n}$

$V = V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup ... \cup V_{y_n}$

Allora U è un intorno aperto di x (intersezione finita di aperti contenenti x), V è un aperto contenente K, e $U \cap V = \varnothing$.

Infatti, se $z \in U \cap V$, allora $z \in U \subset U_{y_i}$ per ogni i, e $z \in V_{y_j}$ per qualche j. Ma questo contraddice $U_{y_j} \cap V_{y_j} = \varnothing$.

Quindi x ha un intorno U disgiunto da K, il che prova che $X \setminus K$ è aperto, cioè K è chiuso.

6.5 Compattezza negli Spazi Topologici

La compattezza è una delle proprietà topologiche più importanti. Uno spazio topologico X si dice **compatto** se ogni ricoprimento aperto di X ammette un sottoricoprimento finito. Formalmente:

X è compatto $\Leftrightarrow$ per ogni famiglia $\{U_i\}_{i \in I}$ di aperti con $X = \cup_{i \in I} U_i$,

esiste un sottoinsieme finito $\{i_1,...,i_n\} \subset I$

tale che $X = \cup_{k=1}^{n} U_{i_k}$

Negli spazi metrici, come abbiamo visto, questa definizione è equivalente alla compattezza sequenziale (ogni successione ha una sottosuccessione convergente). Tuttavia, negli spazi topologici generali, queste due nozioni possono differire.

Teorema di Alexander: Sia B una base (o anche una subbase) per la topologia di X. Allora X è compatto se e solo se ogni ricoprimento di X mediante elementi di B ammette un sottoricoprimento finito.

Dimostrazione:

L'implicazione ($\Longrightarrow$) è ovvia: se X è compatto, allora ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito, in particolare ogni ricoprimento mediante elementi della base.

Per l'implicazione ($\Longleftarrow$), supponiamo che ogni ricoprimento di X mediante elementi di B ammetta un sottoricoprimento finito, e sia $\{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto arbitrario di X.

Per ogni i in I, l'aperto U_i è unione di elementi di B. Possiamo scrivere:

$U_i = \cup_{j\in J_i} B_{ij}$

dove B_{ij} sono elementi di B. Allora:

$X = \cup_{i\in I} U_i = \cup_{i\in I} (\cup_{j\in J_i} B_{ij}) = \cup_{i\in I, j\in J_i} B_{ij}$

Quindi $\{B_{ij} : i \in I, j \in J_i\}$ è un ricoprimento di X mediante elementi di B. Per ipotesi, ammette un sottoricoprimento finito:

$X = B_{i_1,j_1} \cup B_{i_2,j_2} \cup ... \cup B_{i_n,j_n}$

Per ogni k, si ha $B_{i_k,j_k} \subset U_{i_k}$. Quindi:

$X \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup ... \cup U_{i_n}$

Eliminando eventuali ripetizioni tra gli i_k, otteniamo un sottoricoprimento finito del ricoprimento originale $\{U_i\}_{i\in I}$.

Questo completa la dimostrazione.

Teorema di Tychonoff (Caso Finito): Il prodotto finito di spazi compatti è compatto.

Dimostrazione (per il prodotto di due spazi):

Siano X e Y spazi compatti. Dobbiamo mostrare che $X \times Y$ con la topologia prodotto è compatto. Sia $\{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di $X \times Y$.

Per ogni punto (x,y) in $X \times Y$, esiste i(x,y) tale che $(x,y) \in U_{i(x,y)}$. Poiché $U_{i(x,y)}$ è aperto nella topologia prodotto, esistono aperti $V_{x,y} \subset X$ e $W_{x,y} \subset Y$ tali che:

$(x,y) \in V_{x,y} \times W_{x,y} \subset U_{i(x,y)}$

Fissiamo x in X. Al variare di y in Y, gli aperti $W_{x,y}$ ricoprono Y:

$Y = \cup_{y \in Y} W_{x,y}$

Per compattezza di Y, esistono $y_1, ..., y_n$ tali che:

$Y = W_{x,y_1} \cup W_{x,y_2} \cup ... \cup W_{x,y_n}$

Definiamo:

$V_x = V_{x,y_1} \cap V_{x,y_2} \cap ... \cap V_{x,y_n}$

Questo è un intorno aperto di x in X (intersezione finita). Per ogni y in Y, esiste k tale che $y \in W_{x,y_k}$, e quindi:

$(x',y) \in V_x \times W_{x,y_k} \subset U_{i(x,y_k)}$ per ogni $x' \in V_x$

Questo significa che $V_x \times Y$ è ricoperto da un numero finito degli U_i originali.

Ora, la collezione $\{V_x : x \in X\}$ è un ricoprimento aperto di X. Per compattezza di X, esistono $x_1, ..., x_m$ tali che:

$X = V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup ... \cup V_{x_m}$

Per ognuno di questi V_{x_j}, abbiamo visto che $V_{x_j} \times Y$ è ricoperto da un numero finito di U_i. L'unione di tutti questi sottoricoprimenti finiti è un sottoricoprimento finito di $X \times Y$.

Quindi $X \times Y$ è compatto.

6.6 Connessione e Connessione per Archi

Uno spazio topologico X si dice **connesso** se non è l'unione disgiunta di due aperti non vuoti. Equivalentemente, gli unici sottoinsiemi di X che sono simultaneamente aperti e chiusi (clopen) sono l'insieme vuoto $\varnothing$ e l'intero spazio X.

Proposizione: Uno spazio X è connesso se e solo se ogni funzione continua $f: X \to \{0,1\}$ (dove {0,1} ha la topologia discreta) è costante.

Dimostrazione:

Implicazione ($\Rightarrow$): Supponiamo che X sia connesso e sia $f: X \to \{0,1\}$ continua. Allora:

$f^{-1}(\{0\})$ e $f^{-1}(\{1\})$

sono aperti in X (poiché {0} e {1} sono aperti nella topologia discreta), disgiunti, e ricoprono X:

$X = f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{1\})$

Per connessione, uno dei due deve essere vuoto. Supponiamo f^{-1}({1}) = ∅ (l'altro caso è analogo). Allora f(x) = 0 per ogni x in X, cioè f è costante.

Implicazione (⇐): Supponiamo che ogni funzione continua f: X → {0,1} sia costante. Se X non fosse connesso, esisterebbero aperti non vuoti disgiunti U,V tali che X = U ∪ V.

Definiamo:

f(x) = { 0 se x ∈ U

{ 1 se x ∈ V

Questa funzione è ben definita (poiché U e V sono disgiunti) e continua (poiché f^{-1}({0}) = U e f^{-1}({1}) = V sono entrambi aperti). Ma f non è costante, contraddicendo l'ipotesi.

Quindi X deve essere connesso.

Uno spazio X si dice **connesso per archi** se per ogni coppia di punti x,y in X esiste una funzione continua γ: [0,1] → X tale che γ(0) = x e γ(1) = y. Una tale funzione è detta arco (o cammino) da x a y.

Proposizione: Ogni spazio connesso per archi è connesso.

Dimostrazione:

Sia X connesso per archi e supponiamo per assurdo che X non sia connesso. Allora esistono aperti non vuoti disgiunti U,V tali che X = U ∪ V.

Siano x ∈ U e y ∈ V. Per ipotesi, esiste un arco γ: [0,1] → X con γ(0) = x e γ(1) = y.

Consideriamo gli insiemi:

A = γ^{-1}(U) = {t ∈ [0,1] : γ(t) ∈ U}

B = γ^{-1}(V) = {t ∈ [0,1] : γ(t) ∈ V}

Per continuità di γ, questi sono aperti in [0,1]. Inoltre, sono disgiunti (poiché U e V sono disgiunti), non vuoti (poiché 0 ∈ A e 1 ∈ B), e ricoprono [0,1]:

[0,1] = A ∪ B

Ma questo contraddice la connessione di [0,1], che è un fatto fondamentale della topologia euclidea.

Quindi X deve essere connesso.

Il viceversa non è vero in generale. Un controesempio classico è il cosiddetto "pettine topologico", definito come:

$X = (\{0\} \times [0,1]) \cup (\cup_{n=1}^{\infty} \{1/n\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0\})$

con la topologia indotta da $\mathbb{R}^2$. Questo spazio è connesso ma non connesso per archi: non esiste un arco continuo dal punto (0,1) a nessun punto della forma (1/n, 1).

6.7 Componenti Connesse e Applicazioni alla Geodesia

Dato uno spazio topologico X, una **componente connessa** di X è un sottospazio connesso massimale, cioè un sottoinsieme connesso $C \subset X$ tale che se $C \subset D \subset X$ e D è connesso, allora necessariamente C = D.

Proposizione: Per ogni punto x in X, esiste un'unica componente connessa contenente x.

Dimostrazione:

Sia C_x l'unione di tutti i sottoinsiemi connessi di X contenenti x:

$C_x = \cup\{C \subset X : C \text{ connesso e } x \in C\}$

Mostriamo che C_x è connesso. Supponiamo per assurdo che C_x non sia connesso. Allora esistono aperti U,V in C_x (nella topologia di sottospazio), disgiunti, non vuoti, tali che:

$C_x = U \cup V$

Senza perdita di generalità, supponiamo $x \in U$. Per ogni sottoinsieme connesso C con $x \in C \subset C_x$, consideriamo la decomposizione:

$C = (C \cap U) \cup (C \cap V)$

Gli insiemi $C \cap U$ e $C \cap V$ sono aperti in C (come intersezioni di C con aperti di C_x), disgiunti, e ricoprono C. Per connessione di C e poiché $x \in C \cap U$ (quindi $C \cap U$ è non vuoto), deve essere $C \cap V = \varnothing$, cioè $C \subset U$.

Ma allora $C_x = \cup\{C : C \text{ connesso}, x \in C\} \subset U$, contraddicendo il fatto che V sia non vuoto.

Quindi C_x è connesso.

La massimalità di C_x segue dalla sua definizione: se D è un altro insieme connesso con $C_x \subset D$, allora D deve apparire nell'unione che definisce C_x, quindi $D \subset C_x$, da cui $D = C_x$.

Per l'unicità, se C è un'altra componente connessa contenente x, allora $C \subset C_x$ (per definizione di C_x come unione di tutti i connessi contenenti x), e per massimalità di C si ha $C = C_x$.

Questo completa la dimostrazione.

Nella geodesia, la connessione gioca un ruolo cruciale. Una superficie terrestre, modellata come varietà riemanniana, è tipicamente connessa. Il teorema di Hopf-Rinow garantisce che

se la superficie è completa come spazio metrico, allora è anche connessa per archi geodetiche, il che significa che ogni coppia di punti può essere collegata da una geodetica.

Più precisamente, per una varietà riemanniana completa M, dati due punti qualsiasi p,q in M, esiste una geodetica $\gamma: [0,1] \to M$ con $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$, parametrizzata proporzionalmente alla lunghezza d'arco, tale che:

$L(\gamma) = d_g(p,q)$

Questa geodetica realizza la distanza geodetica tra p e q, e fornisce il "cammino più breve" tra i due punti sulla superficie.

6.8 Spazi di Rivestimento e Gruppo Fondamentale

La teoria degli spazi di rivestimento è fondamentale per comprendere la struttura globale delle varietà. Dati spazi topologici E e B, una funzione continua $p: E \to B$ si dice **rivestimento** se per ogni punto b in B esiste un intorno aperto U di b tale che la preimmagine $p^{-1}(U)$ è unione disgiunta di aperti in E, ciascuno dei quali è mappato omeomorficamente su U da p.

Formalmente, $p: E \to B$ è un rivestimento se:

$\forall b \in B, \exists U$ intorno aperto di b tale che $p^{-1}(U) = \sqcup_{i \in I} V_i$

dove i V_i sono aperti disgiunti in E e la restrizione $p|_{V_i}: V_i \to U$ è un omeomorfismo per ogni i in I.

Lo spazio E è detto spazio di rivestimento (o spazio totale), B è detto spazio base, e p è detta proiezione di rivestimento. Gli insiemi V_i sono detti fogli (o falde) sopra U.

Esempio fondamentale: La proiezione $p: \mathbb{R} \to S^1$ definita da:

$p(t) = e^{2\pi i t} = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$

è un rivestimento. Infatti, per ogni punto θ in S^1, considerato come $e^{2\pi i \theta}$, l'intervallo aperto:

$U_\theta = \{e^{2\pi i x} : |x-\theta| < 1/4\}$

è un intorno aperto di θ in S^1, e la sua preimmagine è:

$p^{-1}(U_\theta) = \cup_{n \in \mathbb{Z}} (\theta + n - 1/4, \theta + n + 1/4)$

che è l'unione disgiunta di intervalli aperti in $\mathbb{R}$. La restrizione di p a ciascun intervallo $(\theta + n - 1/4, \theta + n + 1/4)$ è un omeomorfismo su U_θ.

Teorema (Sollevamento di Cammini): Sia $p: E \to B$ un rivestimento, sia $\gamma: [0,1] \to B$ un cammino continuo con $\gamma(0) = b_0$, e sia e_0 un punto in $p^{-1}(b_0)$. Allora esiste un unico cammino $\tilde{\gamma}: [0,1] \to E$ tale che:

(i) $\tilde{\gamma}(0) = e_0$

(ii) $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$

Il cammino $\tilde{\gamma}$ è detto sollevamento di γ che parte da e_0.

Dimostrazione:

Per ogni t in [0,1], sia U_t un intorno aperto di $\gamma(t)$ trivializzante per il rivestimento, cioè tale che $p^{-1}(U_t)$ si decompone in unione disgiunta di aperti mappati omeomorficamente su U_t.

Poiché γ è continua, esiste $\delta_t > 0$ tale che:

$\gamma([t-\delta_t, t+\delta_t] \cap [0,1]) \subset U_t$

La collezione $\{(t-\delta_t, t+\delta_t) : t \in [0,1]\}$ è un ricoprimento aperto dell'intervallo compatto [0,1]. Per compattezza, possiamo estrarre un sottoricoprimento finito. Questo significa che possiamo partizionare [0,1] in intervalli:

$[t_0, t_1], [t_1, t_2], ..., [t_{n-1}, t_n]$

dove $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1$, tali che per ogni k, l'immagine $\gamma([t_{k-1}, t_k])$ è contenuta in un insieme trivializzante U_k.

Costruiamo $\tilde{\gamma}$ induttivamente su ciascun intervallo. Supponiamo di aver definito $\tilde{\gamma}$ su $[0, t_k]$ con $\tilde{\gamma}(0) = e_0$ e $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma|_{[0,t_k]}$.

Consideriamo $\tilde{\gamma}(t_k)$ in E. Sia $V_{k+1,j}$ il foglio sopra U_{k+1} contenente $\tilde{\gamma}(t_k)$. Tale foglio esiste ed è unico perché $\tilde{\gamma}(t_k) \in p^{-1}(\gamma(t_k)) \subset p^{-1}(U_{k+1})$, e $p^{-1}(U_{k+1})$ è unione disgiunta di fogli.

Definiamo per t in $[t_k, t_{k+1}]$:

$\tilde{\gamma}(t) = (p|_{V_{k+1,j}})^{-1}(\gamma(t))$

Questa estensione è ben definita perché $\gamma(t) \in U_{k+1}$ per t in $[t_k, t_{k+1}]$, e $p|_{V_{k+1,j}}$ è un omeomorfismo da $V_{k+1,j}$ su U_{k+1}. È anche continua perché composizione di funzioni continue, e soddisfa $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ per costruzione.

Per l'unicità, supponiamo che $\tilde{\gamma}_1$ e $\tilde{\gamma}_2$ siano due sollevamenti di γ con:

$\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}_2(0) = e_0$

Consideriamo l'insieme:

$A = \{t \in [0,1] : \tilde{\gamma}_1(t) = \tilde{\gamma}_2(t)\}$

Questo insieme è non vuoto (contiene 0) e chiuso (per continuità di $\tilde{\gamma}_1$ e $\tilde{\gamma}_2$). Mostriamo che è anche aperto.

Se $t \in A$, sia U un intorno trivializzante di $\gamma(t)$ e V il foglio contenente $\tilde{\gamma}_1(t) = \tilde{\gamma}_2(t)$. Per continuità, esiste $\varepsilon > 0$ tale che:

$\tilde{\gamma}_1([t-\varepsilon, t+\varepsilon] \cap [0,1]) \subset V$

$\tilde{\gamma}_2([t-\varepsilon, t+\varepsilon] \cap [0,1]) \subset V$

Poiché entrambi $\tilde{\gamma}_1$ e $\tilde{\gamma}_2$ sono sollevamenti di γ e $p|_V$ è iniettiva, deve essere:

$\tilde{\gamma}_1(s) = \tilde{\gamma}_2(s)$ per ogni $s \in [t-\varepsilon, t+\varepsilon] \cap [0,1]$

Quindi A contiene un intorno di t, dunque è aperto.

Essendo [0,1] connesso e A non vuoto, aperto e chiuso, deve essere A = [0,1]. Quindi $\tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_2$.

Questo completa la dimostrazione.

Parte IV - Geometria dell'Ellissoide di Rotazione e Geodesia Pratica

Capitolo 7: L'Ellissoide di Rotazione come Modello della Terra

7.1 Introduzione all'Ellissoide di Rotazione

L'ellissoide di rotazione rappresenta il modello matematico più accurato della forma della Terra per scopi geodetici pratici. Si tratta di una superficie di rivoluzione generata dalla rotazione di un'ellisse attorno al suo asse minore, che coincide con l'asse polare terrestre.

In un sistema di coordinate cartesiane con origine nel centro dell'ellissoide e asse z coincidente con l'asse di rotazione, l'equazione dell'ellissoide assume la forma canonica:

$x^2/a^2 + y^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$

dove:

- a è il semiasse equatoriale (raggio equatoriale)
- b è il semiasse polare

7.2 Parametri Fondamentali dell'Ellissoide

7.2.1 Schiacciamento

Il rapporto di schiacciamento (flattening) è definito come:

$f = (a - b)/a$

Per la Terra, i valori standard adottati dal sistema geodetico WGS84 sono:

- $a \approx 6.378.137$ m
- $f \approx 1/298,257$

La differenza a - b è circa 21 chilometri, una quantità piccola ma geodeticamente significativa. Questo schiacciamento è dovuto alla rotazione terrestre, che produce una forza centrifuga che allontana la massa dall'asse di rotazione.

7.2.2 Eccentricità

L'eccentricità dell'ellissoide è una misura alternativa dello schiacciamento ed è definita come:

$$e^2 = (a^2 - b^2)/a^2 = 2f - f^2$$

La seconda eccentricità è:

$$e'^2 = (a^2 - b^2)/b^2 = e^2/(1 - e^2)$$

Queste quantità sono legate dalle relazioni:

$$b^2 = a^2(1 - e^2)$$
$$b = a(1 - f)$$

Per i valori terrestri, si ottiene:

- $e^2 \approx 0,00669438$
- $e' \approx 0,00673950$

7.3 Coordinate Geodetiche sull'Ellissoide

7.3.1 Definizione delle Coordinate

Le coordinate geodetiche (φ, λ, h) di un punto P nello spazio tridimensionale sono definite come segue:

φ (latitudine geodetica): L'angolo che la normale all'ellissoide passante per P forma con il piano equatoriale. È importante distinguere la latitudine geodetica dalla latitudine geocentrica, che è l'angolo formato dalla congiungente il centro dell'ellissoide con P rispetto al piano equatoriale.

λ (longitudine geodetica): L'angolo diedro tra il piano meridiano passante per P e un meridiano di riferimento (convenzionalmente il meridiano di Greenwich). Varia da 0° a 360° (o da -180° a +180°).

h (altezza ellissoidica): La distanza di P dalla superficie dell'ellissoide misurata lungo la normale all'ellissoide stesso. Questa quantità è distinta dall'altezza ortometrica (quota sul livello del mare).

7.3.2 Formule di Trasformazione

La relazione tra coordinate cartesiane geocentriche (x, y, z) e coordinate geodetiche (φ, λ, h) è data dalle formule di trasformazione:

$$x = (N + h) \cos \varphi \cos \lambda$$
$$y = (N + h) \cos \varphi \sin \lambda$$
$$z = (N(1 - e^2) + h) \sin \varphi$$

dove N è il raggio di curvatura della sezione normale principale (gran normale), definito come:

$$N = a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

Questa quantità N rappresenta geometricamente la distanza tra il punto P sulla superficie dell'ellissoide e l'intersezione della normale all'ellissoide con l'asse di rotazione z.

7.3.3 Derivazione del Raggio di Curvatura N

Per derivare rigorosamente la formula di N, consideriamo l'ellisse meridiana nel piano (r, z) dove $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ rappresenta la distanza dall'asse z. L'equazione dell'ellisse meridiana è:

$$r^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$$

La normale all'ellisse in un punto generico (r, z) ha coefficiente angolare:

$$dz/dr = -(b^2/a^2)(r/z)$$

Il punto sulla superficie dell'ellissoide con latitudine geodetica φ ha coordinate (r_0, z_0) tali che la normale ha coefficiente angolare -cot φ, poiché la normale forma un angolo φ con il piano equatoriale. Quindi:

$$-(b^2/a^2)(r_0/z_0) = -\cot \varphi$$

da cui:

$$z_0/r_0 = (a^2/b^2) \tan \varphi$$

Sostituendo questa relazione nell'equazione dell'ellisse:

$r_0^2/a^2 + z_0^2/b^2 = 1$

e usando $z_0 = r_0(a^2/b^2) \tan \varphi$, otteniamo:

$r_0^2/a^2 + r_0^2(a^4/b^4) \tan^2 \varphi / b^2 = 1$
$r_0^2/a^2 [1 + (a^2/b^2) \tan^2 \varphi] = 1$

Utilizzando l'identità trigonometrica:

$1 + (a^2/b^2) \tan^2 \varphi = (\cos^2 \varphi + (a^2/b^2) \sin^2 \varphi) / \cos^2 \varphi$

si ottiene:

$r_0^2 = a^2 \cos^2 \varphi / [\cos^2 \varphi + (a^2/b^2) \sin^2 \varphi]$
$= a^2 \cos^2 \varphi / [(a^2/b^2)(b^2/a^2) \cos^2 \varphi + (a^2/b^2) \sin^2 \varphi]$
$= a^2 b^2 \cos^2 \varphi / [b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi]$
$= a^2 \cos^2 \varphi / [1 - (1 - b^2/a^2) \sin^2 \varphi]$
$= a^2 \cos^2 \varphi / (1 - e^2 \sin^2 \varphi)$

Quindi:

$r_0 = (a \cos \varphi) / \text{sqrt}(1 - e^2 \sin^2 \varphi) = N \cos \varphi$

Analogamente, per la coordinata z:

$z_0 = r_0 (a^2/b^2) \tan \varphi = N \cos \varphi (a^2/b^2) \tan \varphi = N (a^2/b^2) \sin \varphi$
$= N a^2 \sin \varphi / [a^2(1 - e^2)] = N(1 - e^2) \sin \varphi$

Un punto a altezza h sopra l'ellissoide lungo la normale ha quindi le coordinate cartesiane:

$x = r_0 \cos \lambda + h \cos \varphi \cos \lambda = (N + h) \cos \varphi \cos \lambda$
$y = r_0 \sin \lambda + h \cos \varphi \sin \lambda = (N + h) \cos \varphi \sin \lambda$
$z = z_0 + h \sin \varphi = (N(1 - e^2) + h) \sin \varphi$

7.4 I Raggi di Curvatura Principali

7.4.1 Teoria Generale delle Curvature Principali

Su una superficie nello spazio tridimensionale euclideo, in ogni punto esistono due direzioni principali di curvatura, che sono ortogonali tra loro e corrispondono ai valori estremi (massimo e minimo) della curvatura normale. Per l'ellissoide di rotazione, grazie alla simmetria assiale, queste direzioni sono:

- Il meridiano (direzione nord-sud)
- Il parallelo (direzione est-ovest)

7.4.2 Raggio di Curvatura Meridiano M

Il raggio di curvatura della sezione meridiana (curvatura in direzione nord-sud) è:

$$M = a(1 - e^2) / (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{(3/2)}$$

Per derivare questa formula, utilizziamo la parametrizzazione standard dell'ellisse mediante la latitudine parametrica (o latitudine geocentrica ridotta). L'ellisse meridiana può essere parametrizzata come:

$$r = a \cos u$$
$$z = b \sin u$$

dove u è la latitudine parametrica, legata alla latitudine geodetica φ dalla relazione:

$$\tan u = (b/a) \tan \varphi = \sqrt{(1 - e^2)} \tan \varphi$$

Il raggio di curvatura di una curva piana parametrizzata (r(u), z(u)) è dato dalla formula:

$$\rho = [(dr/du)^2 + (dz/du)^2]^{(3/2)} / |dr/du \cdot d^2z/du^2 - dz/du \cdot d^2r/du^2|$$

Calcoliamo le derivate:

$$dr/du = -a \sin u$$
$$dz/du = b \cos u$$
$$d^2r/du^2 = -a \cos u$$
$$d^2z/du^2 = -b \sin u$$

Il numeratore è:

$$[(dr/du)^2 + (dz/du)^2]^{(3/2)} = [a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u]^{(3/2)}$$
$$= [a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 u]^{(3/2)}$$
$$= [a^2(1 - e^2 \cos^2 u)]^{(3/2)}$$

Il denominatore è:

$$|dr/du \cdot d^2z/du^2 - dz/du \cdot d^2r/du^2| = |(-a \sin u)(-b \sin u) - (b \cos u)(-a \cos u)|$$
$$= |ab \sin^2 u + ab \cos^2 u|$$
$$= ab$$

Quindi:

M = [a²(1 - e² cos² u)]^(3/2) / ab
  = a²(1 - e² cos² u)^(3/2) / [ab]
  = a²(1 - e² cos² u)^(3/2) / [a · a sqrt(1 - e²)]
  = a(1 - e²)^(-1/2) (1 - e² cos² u)^(3/2)

Per esprimere M in funzione della latitudine geodetica φ, utilizziamo la relazione tra u e φ. Da tan u = sqrt(1 - e²) tan φ, si ricava:

cos u = cos φ / sqrt(cos² φ + (1 - e²) sin² φ) = cos φ / sqrt(1 - e² sin² φ)

Sostituendo:

1 - e² cos² u = 1 - e² cos² φ / (1 - e² sin² φ)
= [1 - e² sin² φ - e² cos² φ] / (1 - e² sin² φ)
= [1 - e²(sin² φ + cos² φ)] / (1 - e² sin² φ)
= (1 - e²) / (1 - e² sin² φ)

Pertanto:

M = a(1 - e²)^(-1/2) [(1 - e²) / (1 - e² sin² φ)]^(3/2)
  = a(1 - e²)^(-1/2) (1 - e²)^(3/2) / (1 - e² sin² φ)^(3/2)
  = a(1 - e²) / (1 - e² sin² φ)^(3/2)

7.4.3 Raggio di Curvatura della Sezione Normale Principale N

Il raggio di curvatura della sezione normale principale (in direzione est-ovest) è stato già introdotto:

N = a / sqrt(1 - e² sin² φ)

Si noti che N ≥ M per ogni valore di φ, con uguaglianza solo all'equatore (φ = 0).

7.4.4 Proprietà dei Raggi di Curvatura

Alcune proprietà notevoli:

All'equatore (φ = 0):

M(0) = a(1 - e²)
N(0) = a

Ai poli (φ = ±π/2):

$M(\pm\pi/2) = a / (1 - e^2) = a / b^2 \cdot a = a^2 / b$
$N(\pm\pi/2) = a / \sqrt{1 - e^2} = a / (b/a) = a^2 / b$

Quindi ai poli M = N, e la superficie ha curvatura uguale in tutte le direzioni (punto ombelicale).

7.5 La Metrica Riemanniana sull'Ellissoide

7.5.1 Derivazione della Prima Forma Fondamentale

Per derivare la metrica riemanniana (prima forma fondamentale) sull'ellissoide, parametrizziamo la superficie con le coordinate geodetiche (φ, λ). Un punto sulla superficie ha coordinate cartesiane:

$\vec{r}(\varphi, \lambda) = (N \cos\varphi \cos\lambda, N \cos\varphi \sin\lambda, N(1 - e^2) \sin\varphi)$

I vettori tangenti fondamentali sono:

$\partial\vec{r}/\partial\varphi = ((dN/d\varphi) \cos\varphi - N \sin\varphi) \cos\lambda \cdot \hat{e}_x$
$+ ((dN/d\varphi) \cos\varphi - N \sin\varphi) \sin\lambda \cdot \hat{e}_y$
$+ ((dN/d\varphi)(1 - e^2) \sin\varphi + N(1 - e^2) \cos\varphi) \cdot \hat{e}_z$

$\partial\vec{r}/\partial\lambda = -N \cos\varphi \sin\lambda \cdot \hat{e}_x + N \cos\varphi \cos\lambda \cdot \hat{e}_y$

dove:

$dN/d\varphi = a \cdot d/d\varphi [(1 - e^2 \sin^2\varphi)^{(-1/2)}]$
$= a \cdot (-1/2)(1 - e^2 \sin^2\varphi)^{(-3/2)} \cdot (-2e^2 \sin\varphi \cos\varphi)$
$= a e^2 \sin\varphi \cos\varphi / (1 - e^2 \sin^2\varphi)^{(3/2)}$

Dalla teoria della curvatura delle superfici, il coefficiente $(dN/d\varphi) \cos\varphi - N \sin\varphi$ può essere calcolato:

$dN/d\varphi \cos\varphi - N \sin\varphi = [a e^2 \sin\varphi \cos^2\varphi / (1 - e^2 \sin^2\varphi)^{(3/2)}] - [a \sin\varphi / \sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}]$
$= a \sin\varphi \{[e^2 \cos^2\varphi / (1 - e^2 \sin^2\varphi)^{(3/2)}] - [1 / \sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}]\}$
$= a \sin\varphi \{[e^2 \cos^2\varphi - (1 - e^2 \sin^2\varphi)] / (1 - e^2 \sin^2\varphi)^{(3/2)}\}$
$= a \sin\varphi (e^2 - 1) / (1 - e^2 \sin^2\varphi)^{(3/2)}$
$= -a(1 - e^2) \sin\varphi / (1 - e^2 \sin^2\varphi)^{(3/2)}$
$= -M \sin\varphi$

7.5.2 I Coefficienti Metrici

Il coefficiente metrico $g_{\varphi\varphi} = E$ è la norma al quadrato del vettore $\partial\vec{r}/\partial\varphi$. Dalla relazione precedente:

$|\partial\vec{r}/\partial\varphi| = M$

Quindi:

$E = M^2$

Il coefficiente $g_{\lambda\lambda} = G$ è:

$G = |\partial\vec{r}/\partial\lambda|^2 = N^2 \cos^2\varphi\,(\sin^2\lambda + \cos^2\lambda) = N^2\cos^2\varphi$

Il coefficiente misto $g_{\varphi\lambda} = F$ è il prodotto scalare tra i vettori tangenti. Per simmetria dell'ellissoide di rotazione, i meridiani e i paralleli sono ortogonali:

$F = (\partial\vec{r}/\partial\varphi)\cdot(\partial\vec{r}/\partial\lambda) = 0$

7.5.3 Espressione Finale della Metrica

La metrica riemanniana sull'ellissoide è quindi:

$ds^2 = M^2\,d\varphi^2 + N^2\cos^2\varphi\,d\lambda^2$

L'elemento di area della superficie è:

$dA = \sqrt{EG - F^2}\,d\varphi\,d\lambda = \sqrt{M^2\cdot N^2\cos^2\varphi}\,d\varphi\,d\lambda = MN\cos\varphi\,d\varphi\,d\lambda$

Questa formula è fondamentale per calcoli di geodesia, come la determinazione dell'area di regioni sulla superficie terrestre.

7.6 Le Geodetiche sull'Ellissoide

7.6.1 Equazioni Geodetiche

Le geodetiche sull'ellissoide sono le curve di minima lunghezza tra due punti sulla superficie. Esse soddisfano le equazioni geodetiche di Eulero-Lagrange derivate dalla metrica. Con la metrica:

$ds^2 = M^2\,d\varphi^2 + N^2\cos^2\varphi\,d\lambda^2$

i simboli di Christoffel risultano piuttosto complessi da calcolare esplicitamente.

7.6.2 La Formula di Clairaut

Un approccio più elegante sfrutta la simmetria di rotazione dell'ellissoide attorno all'asse polare. Per questa simmetria, esiste un integrale primo delle equazioni geodetiche: il

momento angolare rispetto all'asse di rotazione rimane costante lungo una geodetica. Questo principio si esprime nella celebre **formula di Clairaut**:

$$N \cos \varphi \sin \alpha = C \text{ (costante)}$$

dove α è l'azimut della geodetica, cioè l'angolo che la direzione tangente alla geodetica forma con il meridiano locale.

Dimostrazione della formula di Clairaut:

Consideriamo il lagrangiano per le geodetiche parametrizzate con un parametro affine t:

$$L = (1/2)[M^2 \dot{\varphi}^2 + N^2 \cos^2 \varphi \, \dot{\lambda}^2]$$

dove il punto denota la derivata rispetto a t. Poiché L non dipende esplicitamente da λ (coordinate ciclica), il momento coniugato:

$$p_\lambda = \partial L / \partial \dot{\lambda} = N^2 \cos^2 \varphi \, \dot{\lambda}$$

è una costante del moto lungo la geodetica.

L'azimut α è definito geometricamente da:

$$\tan \alpha = (\text{componente est-ovest della velocità}) / (\text{componente nord-sud della velocità}) = (N \cos \varphi \, \dot{\lambda}) / (M \dot{\varphi})$$

Da cui:

$$\sin \alpha = (N \cos \varphi \, \dot{\lambda}) / \sqrt{M^2 \dot{\varphi}^2 + N^2 \cos^2 \varphi \, \dot{\lambda}^2}$$

Per una geodetica parametrizzata a velocità unitaria:

$$M^2 \dot{\varphi}^2 + N^2 \cos^2 \varphi \, \dot{\lambda}^2 = 1$$

Dalla conservazione di p_λ e dalle relazioni trigonometriche, si ricava:

$$N \cos \varphi \sin \alpha = N^2 \cos^2 \varphi \, \dot{\lambda} / \sqrt{M^2 \dot{\varphi}^2 + N^2 \cos^2 \varphi \, \dot{\lambda}^2} = \text{costante}$$

7.6.3 Interpretazione Geometrica

La costante di Clairaut C ha un'interpretazione geometrica notevole: rappresenta il raggio del parallelo dove la geodetica raggiunge la sua massima latitudine (il "vertice" della geodetica), cioè il punto dove $\alpha = 90°$ e la geodetica è tangente al parallelo.

Per una geodetica che passa per un punto con latitudine φ_0 e azimut α_0:

$C = N(\varphi_0) \cos \varphi_0 \sin \alpha_0$

Questa relazione permette di tracciare geodetiche sull'ellissoide e risolvere problemi geodetici diretti e inversi.

7.7 Applicazioni Geodetiche Pratiche

7.7.1 Il Problema Geodetico Diretto

Dati un punto iniziale P_0 con coordinate (φ_0, λ_0), un azimut iniziale α_0 e una distanza s lungo la geodetica, determinare le coordinate (φ_1, λ_1) del punto finale P_1 e l'azimut finale α_1.

Questo problema si risolve numericamente integrando le equazioni differenziali delle geodetiche con la condizione iniziale data, utilizzando metodi come Runge-Kutta o sviluppi in serie.

7.7.2 Il Problema Geodetico Inverso

Dati due punti $P_0(\varphi_0, \lambda_0)$ e $P_1(\varphi_1, \lambda_1)$, determinare la distanza geodetica s tra i due punti e gli azimut α_0 e α_1.

Per piccole distanze (fino a circa 200 km) si possono usare formule approssimate. Per distanze maggiori sono necessari algoritmi iterativi più sofisticati, come l'algoritmo di Vincenty.

7.7.3 Deviazione tra Geodetica e Lossodromica

Una lossodromica (rhumb line) è una curva sulla superficie terrestre che interseca tutti i meridiani con lo stesso angolo. Le lossodromiche sono importanti in navigazione nautica e aeronautica. Sull'ellissoide, solo i meridiani e l'equatore sono simultaneamente geodetiche e lossodromiche. Per percorsi obliqui, la geodetica è sempre più corta della lossodromica corrispondente.

L'ellissoide di rotazione fornisce un modello matematico rigoroso e preciso della forma terrestre, essenziale per tutte le applicazioni geodetiche moderne. La comprensione approfondita della sua geometria differenziale - dai raggi di curvatura alla metrica riemanniana, dalle coordinate geodetiche alle geodetiche come curve di minima lunghezza - costituisce il fondamento teorico di sistemi di posizionamento globale, cartografia e geodesia fisica.

Parte V - Teoria Spettrale del Laplaciano e Applicazioni Avanzate

Capitolo 8: Autovalori e Autofunzioni del Laplaciano

8.1 Il Laplaciano su Varietà Riemanniane

8.1.1 Definizione e Proprietà Fondamentali

Su una varietà riemanniana compatta (M, g), il laplaciano Δ (o operatore di Laplace-Beltrami) agisce sullo spazio delle funzioni lisce e si estende naturalmente allo spazio $L^2(M)$ delle funzioni a quadrato integrabile.

Lo spettro del laplaciano consiste negli autovalori λ tali che esiste una funzione non nulla f soddisfacente l'equazione agli autovalori:

$$\Delta f = -\lambda f$$

La scelta del segno negativo è convenzionale e garantisce che gli autovalori siano non negativi, come vedremo.

8.1.2 Non Negatività degli Autovalori

Proposizione: Tutti gli autovalori del laplaciano su una varietà riemanniana compatta sono non negativi.

Dimostrazione: Moltiplicando l'equazione $\Delta f = -\lambda f$ per f e integrando sull'intera varietà:

$$\int_M f \cdot \Delta f \cdot dV = -\lambda \int_M f^2 \, dV$$

Integrando per parti (utilizzando il teorema di Green sulla varietà senza bordo):

$$\int_M f \cdot \Delta f \cdot dV = -\int_M |\text{grad } f|^2 \, dV$$

Quindi:

$$-\int_M |\text{grad } f|^2 \, dV = -\lambda \int_M f^2 \, dV$$

Da cui:

$$\lambda = \int_M |\text{grad } f|^2 \, dV \, / \int_M f^2 \, dV$$

Poiché entrambi gli integrali al numeratore e denominatore sono non negativi (e il denominatore è positivo per $f \neq 0$), si ha $\lambda \geq 0$.

L'uguaglianza $\lambda = 0$ si verifica se e solo se grad $f = 0$ ovunque, il che implica che f è costante. Quindi $\lambda_0 = 0$ è un autovalore semplice corrispondente alle funzioni costanti.

8.2 Decomposizione Spettrale

8.2.1 Teorema Spettrale per il Laplaciano

Teorema (Decomposizione Spettrale): Su una varietà riemanniana compatta M, il laplaciano ha uno spettro puramente puntuale (discreto) consistente in una successione di autovalori:

$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots \to \infty$

con molteplicità finite. Esiste una base ortonormale completa {φ_n}_{n=0}^∞ dello spazio di Hilbert L²(M) consistente in autofunzioni:

Δφ_n = -λ_n φ_n

normalizzate secondo:

∫_M φ_n φ_m dV = δ_nm (delta di Kronecker)

Ogni funzione f ∈ L²(M) può essere espansa nella serie di Fourier generalizzata:

f = ∑_{n=0}^∞ c_n φ_n

dove i coefficienti di Fourier sono:

c_n = ∫_M f φ_n dV

8.2.2 Schema di Dimostrazione

La dimostrazione si basa sulla teoria degli operatori compatti in spazi di Hilbert:

1. **Costruzione del risolvente:** Si considera l'operatore risolvente (Δ + I)^(-1), che è definito come l'inverso di (Δ + I). Questo operatore è ben definito poiché Δ + I è invertibile (tutti gli autovalori di Δ sono ≥ 0, quindi Δ + I ha tutti gli autovalori ≥ 1).

2. **Compattezza:** L'operatore (Δ + I)^(-1) è compatto su L²(M). Questo segue dal teorema di immersione di Sobolev: l'inclusione dello spazio di Sobolev H²(M) in L²(M) è compatta per varietà compatte.

3. **Autoaggiuntezza:** L'operatore (Δ + I)^(-1) è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare L².

4. **Teorema spettrale per operatori compatti:** Per il teorema spettrale di Hilbert-Schmidt, un operatore compatto autoaggiunto su uno spazio di Hilbert separabile ammette una base ortonormale di autovettori con autovalori reali che tendono a zero (se lo spazio è infinito-dimensionale).

5. **Corrispondenza degli autovalori:** Gli autovalori μ_n di (Δ + I)^(-1) sono della forma μ_n = 1/(λ_n + 1), dove λ_n sono gli autovalori di Δ. Poiché μ_n → 0, si ha λ_n → ∞.

8.2.3 Principio del Minimo-Massimo (Min-Max)

Gli autovalori del laplaciano possono essere caratterizzati variazionalmente mediante il principio di Rayleigh-Ritz:

$\lambda_n = \min_{V_{n+1}} \max_{f \in V_{n+1}, f\neq 0} [\int_M |\text{grad } f|^2 \, dV] / [\int_M f^2 \, dV]$

dove il minimo è preso su tutti i sottospazi (n+1)-dimensionali V_{n+1} di $H^1(M)$.

8.3 La Formula di Weyl e Distribuzione Asintotica degli Autovalori

8.3.1 Enunciato del Teorema di Weyl

Un risultato fondamentale nella geometria spettrale è la formula di Weyl, che descrive il comportamento asintotico della funzione di conteggio degli autovalori.

Teorema di Weyl: Sia M una varietà riemanniana compatta di dimensione n. Sia $N(\lambda)$ il numero di autovalori del laplaciano minori o uguali a λ (contati con molteplicità). Allora:

$N(\lambda) \sim (\text{Vol}(M)/(2\pi)^n) \cdot \omega_n \cdot \lambda^{(n/2)}$ quando $\lambda \to \infty$

dove $\omega_n = \pi^{(n/2)} / \Gamma(n/2 + 1)$ è il volume della palla unitaria in R^n.

Per una superficie bidimensionale (n = 2), questo diventa:

$N(\lambda) \sim (\text{Area}(M) / 4\pi) \cdot \lambda$ quando $\lambda \to \infty$

8.3.2 Significato del Teorema

Il teorema di Weyl stabilisce una connessione profonda tra:

- **Geometria:** Il volume della varietà (invariante geometrico globale)
- **Analisi:** La distribuzione degli autovalori del laplaciano (proprietà spettrale)

In particolare, il coefficiente principale nell'espansione asintotica di $N(\lambda)$ è determinato unicamente dal volume totale della varietà, indipendentemente da altri dettagli geometrici.

8.3.3 Idea della Dimostrazione

La dimostrazione completa richiede tecniche avanzate di analisi microlocale e teoria pseudodifferenziale. L'idea euristica è la seguente:

Per frequenze alte (λ grande), le autofunzioni del laplaciano oscillano rapidamente e si comportano localmente come onde piane con vettore d'onda k, dove $|k|^2 \approx \lambda$.

Il conteggio degli autovalori corrisponde quindi al conteggio degli stati quantistici in una "scatola" di volume Vol(M), seguendo la **densità di stati della meccanica quantistica**:

densità di stati ~ $\text{Vol}(M) \cdot (k^{(n-1)}) / (2\pi)^n$

Integrando rispetto a k fino a $|k|^2 = \lambda$, si ottiene $N(\lambda)$.

8.3.4 Sviluppi Successivi e Invarianti Geometrici

Esistono termini correttivi nell'espansione asintotica di $N(\lambda)$ che coinvolgono invarianti geometrici più raffinati:

$$N(\lambda) = (\text{Vol}(M)/(2\pi)^n)\, \omega_n \lambda^{n/2} + a_1 \lambda^{(n-1)/2} + a_2 \lambda^{(n-2)/2} + \ldots$$

I coefficienti a_1, a_2, ... dipendono da:

- La curvatura scalare integrata
- La curvatura di Gauss (per superfici)
- La geometria del bordo (se presente)
- Invarianti topologici

8.4 Il Nucleo del Calore (Heat Kernel)

8.4.1 L'Equazione del Calore su Varietà

L'equazione del calore su una varietà riemanniana M è:

$$\partial u/\partial t = \Delta u$$

con condizione iniziale $u(x, 0) = f(x)$. La soluzione è data dalla convoluzione con il nucleo del calore:

$$u(x, t) = \int_M K(x, y, t)\, f(y)\, dV(y)$$

dove $K(x, y, t)$ è il **nucleo del calore** (heat kernel), definito come:

$$K(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\, \varphi_n(x)\, \varphi_n(y)$$

dove $\{\varphi_n\}$ sono le autofunzioni ortonormali del laplaciano con autovalori $\{\lambda_n\}$.

8.4.2 Proprietà del Nucleo del Calore

Il nucleo del calore soddisfa:

1. **Equazione del calore:** $\partial K/\partial t = \Delta_x K$ (in x) e $\partial K/\partial t = \Delta_y K$ (in y)
2. **Simmetria:** $K(x, y, t) = K(y, x, t)$
3. **Condizione iniziale:** $\lim_{t\to 0^+} K(x, y, t) = \delta(x - y)$ (distribuzione delta di Dirac)
4. **Normalizzazione:** $\int_M K(x, y, t)\, dV(y) = 1$ per ogni x e t

8.4.3 Espansione Asintotica del Heat Kernel

Teorema (Espansione Asintotica): Per $t \to 0^+$, il nucleo del calore valutato sulla diagonale ha lo sviluppo asintotico:

$$K(x, x, t) \sim (4\pi t)^{-n/2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\, t^k$$

dove $n = \dim M$ e i coefficienti $a_k(x)$ sono polinomi locali negli invarianti della curvatura. I primi termini sono:

$a_0(x) = 1$

$a_1(x) = (1/6)\, R(x)$

$a_2(x) = (1/360)[5R^2(x) - 2|Ric|^2(x) + 2|Riem|^2(x)]$

dove:

- R(x) è la curvatura scalare in x
- Ric è il tensore di Ricci
- Riem è il tensore di Riemann

8.4.4 Traccia del Heat Kernel

Integrando sulla varietà:

$\int_M K(x, x, t)\, dV \sim (4\pi t)^{(-n/2)} [Vol(M) + (t/6) \int_M R\, dV + O(t^2)]$

Ma la traccia dell'operatore del calore è:

$Tr(e^{(t\Delta)}) = \int_M K(x, x, t)\, dV = \sum_{n=0}^{\infty} e^{(-\lambda_n t)}$

Questa identità lega la somma degli autovalori (informazione spettrale) con gli invarianti geometrici della varietà.

8.5 Il Problema Isospettrale

8.5.1 "Can One Hear the Shape of a Drum?"

Una domanda fondamentale in geometria spettrale, posta da Mark Kac nel 1966, è:

Lo spettro del laplaciano determina univocamente la geometria della varietà?

In termini colloquiali: "Si può udire la forma di un tamburo?" - cioè, ascoltando le frequenze di vibrazione di una membrana, è possibile ricostruire la sua forma geometrica?

8.5.2 Risposta al Problema

La risposta è sorprendentemente **negativa** in generale.

Nel 1992, **Gordon, Webb e Wolpert** costruirono esplicitamente coppie di domini piani (regioni in R^2) che hanno:

- Lo stesso spettro del laplaciano (isosp ettralità)
- Forme geometriche diverse (non isometriche)

Questi controesempi sono basati su tecniche di "trasplantazione spettrale" (spectral transplantation) e utilizzano domini con simmetrie opportune.

8.5.3 Invarianti Spettralmente Determinabili

Nonostante varietà diverse possano avere lo stesso spettro, quest'ultimo contiene comunque una quantità notevole di informazione geometrica.

Teorema (Invarianti Spettrali): Dallo spettro del laplaciano su una varietà compatta M si possono determinare:

1. **La dimensione** dim M
2. **Il volume** Vol(M)
3. **L'integrale della curvatura scalare** $\int_M R\, dV$
4. **(Per superfici) La caratteristica di Eulero** $\chi(M)$ tramite il teorema di Gauss-Bonnet

Dimostrazione (schema):

1. La dimensione si determina dall'esponente nell'asintotica di Weyl: $N(\lambda) \sim C\, \lambda^{(n/2)} \rightarrow n = 2 \log N(\lambda) / \log \lambda$.

2. Il volume si ottiene dal coefficiente principale C nella formula di Weyl.

3. L'integrale della curvatura scalare appare nel coefficiente del termine lineare in t dell'espansione del heat kernel.

Per superfici bidimensionali, il teorema di Gauss-Bonnet afferma:

$\int_M K\, dA = 2\pi\, \chi(M)$

4. dove K è la curvatura gaussiana. Questo integrale è spettralmente determinato dai coefficienti dell'espansione del heat kernel.

8.6 Spazi Metrici di Gromov-Hausdorff

8.6.1 Motivazione

Per confrontare varietà riemanniane o più generalmente spazi metrici di natura molto diversa (diverse topologie, diverse dimensioni), Gromov introdusse una nozione di distanza che generalizza il concetto di distanza di Hausdorff.

8.6.2 Distanza di Hausdorff

Dati due sottoinsiemi A, B di uno spazio metrico (Z, d), la **distanza di Hausdorff** è:

$d_H(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\}$

dove:

$d(a, B) = \inf_{b \in B} d(a, b)$

Intuitivamente, $d_H(A, B)$ misura quanto A e B sono "vicini" come sottoinsiemi di Z.

8.6.3 Distanza di Gromov-Hausdorff

Dati due spazi metrici compatti (X, d_X) e (Y, d_Y), la loro **distanza di Gromov-Hausdorff** è:

d_GH(X, Y) = inf d_H^Z(f(X), g(Y))

dove l'infimo è preso su:

- Tutti gli spazi metrici Z
- Tutte le immersioni isometriche f: X → Z e g: Y → Z
- d_H^Z denota la distanza di Hausdorff in Z

In altre parole, si cerca lo spazio "ambiente" Z e le immersioni f, g che minimizzano la distanza di Hausdorff tra le immagini f(X) e g(Y).

8.6.4 Completezza dello Spazio di Gromov-Hausdorff

Teorema (Gromov): Lo spazio degli spazi metrici compatti modulo isometria, dotato della distanza di Gromov-Hausdorff, è uno spazio metrico completo.

Questo risultato permette di definire limiti di successioni di spazi metrici, anche quando questi spazi hanno topologie molto diverse.

8.7 Teoremi di Collasso e Convergenza

8.7.1 Teorema di Cheeger-Gromov

Teorema (Cheeger-Gromov): Sia {M_i} una successione di varietà riemanniane compatte di dimensione n con:

- Curvatura sezionale limitata: |K| ≤ C
- Volume uniformemente limitato dal basso: Vol(M_i) ≥ v > 0

Allora esiste una sottosuccessione {M_{i_k}} convergente nella topologia di Gromov-Hausdorff a uno spazio metrico limite (X, d).

8.7.2 Fenomeno del Collasso

In generale, lo spazio limite X può avere dimensione inferiore a n (fenomeno di **collasso**). Esempio:

Consideriamo la successione di tori piatti $T^2 = R^2/Z^2$ con metriche:

$ds_i^2 = dx^2 + (1/i^2)\, dy^2$

Al limite $i \to \infty$, questa successione collassa a un cerchio S^1.

8.8 Curvatura nel Senso di Alexandrov

8.8.1 Motivazione e Definizione

Per spazi metrici generali che non sono necessariamente varietà lisce, Alexandrov introdusse una nozione generalizzata di **limitazione della curvatura** che ha senso anche per spazi singolari.

Definizione: Uno spazio metrico (X, d) si dice avere curvatura $\geq \kappa$ nel senso di Alexandrov se per ogni geodetica $\gamma: [0, 1] \to X$ e ogni punto $p \in X$, la funzione:

$$t \mapsto d^2(p, \gamma(t))$$

è κ-convessa. Precisamente, per ogni $t \in [0, 1]$:

$$d^2(p, \gamma(t)) \leq (1-t)\, d^2(p, \gamma(0)) + t\, d^2(p, \gamma(1)) - \kappa\, t(1-t)\, d^2(\gamma(0), \gamma(1))$$

Il termine con κ rappresenta la correzione rispetto alla convessità euclidea ($\kappa = 0$).

8.8.2 Casi Particolari

Curvatura ≥ 0 (non negativa): La condizione si riduce a:

$$d^2(p, \gamma(t)) \leq (1-t)\, d^2(p, \gamma(0)) + t\, d^2(p, \gamma(1))$$

Questa è la convessità ordinaria della funzione distanza al quadrato.

Curvatura $\geq \kappa > 0$: Lo spazio è "più curvo" della sfera di raggio $1/\sqrt{\kappa}$.

Curvatura $\geq \kappa < 0$: Lo spazio è "meno curvo" dello spazio iperbolico di curvatura κ.

8.8.3 Teorema di Splitting di Toponogov

Un risultato notevole nella teoria degli spazi di Alexandrov è:

Teorema (Toponogov): Sia (X, d) uno spazio metrico completo di dimensione n con curvatura ≥ 0 nel senso di Alexandrov. Se X contiene una linea (cioè una geodetica $\gamma: \mathbb{R} \to X$ che è un'isometria), allora:

$$X \cong Y \times \mathbb{R}$$

dove Y è uno spazio di Alexandrov di dimensione $n-1$ con curvatura ≥ 0.

Questo teorema generalizza il teorema di splitting di Cheeger-Gromoll per varietà riemanniane lisce.

8.9 La Congettura di Poincaré e il Flusso di Ricci

8.9.1 Il Flusso di Ricci

Il **flusso di Ricci** è un'equazione di evoluzione sulla metrica di una varietà riemanniana, introdotta da Richard Hamilton:

$\partial g/\partial t = -2\,\mathrm{Ric}$

dove Ric è il tensore di Ricci della metrica g(t). Questa equazione è l'analogo geometrico dell'equazione del calore, dove la metrica "fluisce" deformandosi secondo la curvatura locale.

Il segno negativo fa sì che regioni di curvatura positiva si contraggano, mentre regioni di curvatura negativa si espandano, con l'obiettivo di "uniformare" la geometria.

8.9.2 Enunciato della Congettura di Poincaré

La **congettura di Poincaré** (1904) afferma:

Ogni varietà compatta, semplicemente connessa di dimensione 3 è omeomorfa alla 3-sfera S^3.

Equivalentemente: Ogni 3-varietà chiusa con gruppo fondamentale banale è topologicamente una 3-sfera.

8.9.3 Soluzione tramite il Flusso di Ricci

Nel 2003, **Grigori Perelman** completò un programma iniziato da Hamilton, dimostrando la congettura di Poincaré utilizzando il flusso di Ricci con modifiche dette "surgery" (chirurgia).

L'idea è la seguente:

1. Si parte da una qualsiasi metrica riemanniana g_0 sulla 3-varietà M.
2. Si fa evolvere g_0 secondo il flusso di Ricci.
3. Il flusso tende a rendere la geometria più uniforme, ma possono formarsi singolarità in tempo finito.
4. Quando si formano singolarità, si esegue una "surgery" topologica controllata per eliminarle.
5. Si continua il flusso fino a che la varietà si estingue (collassa a un punto) oppure si stabilizza a una metrica di curvatura costante.
6. Dall'analisi topologica del processo si deduce che M è omeomorfa a S^3.

8.9.4 La Funzionale di Perelman

Perelman introdusse una funzionale di entropia:

$F(g, f) = \int_M [R + |\nabla f|^2]\, e^{(-f)}\, dV$

dove:

- R è la curvatura scalare rispetto alla metrica g
- f è una funzione ausiliaria detta "entropica"

Proprietà cruciale: La funzionale F è monotona decrescente lungo il flusso di Ricci modificato, fornendo un controllo cruciale sull'evoluzione geometrica e topologica.

Teorema (Perelman): Sia (M^3, g_0) una varietà riemanniana compatta semplicemente connessa di dimensione 3. Allora il flusso di Ricci con surgery, partendo da g_0, estingue M in tempo finito, dimostrando che M è diffeomorfa (e quindi omeomorfa) a S^3.

8.10 Applicazioni alla Geodesia Fisica

8.10.1 Il Geoide

La teoria matematica sviluppata trova applicazioni concrete nella geodesia fisica, dove si studia il campo gravitazionale terrestre e le sue deviazioni dall'ellissoide di riferimento.

Il **geoide** è la superficie equipotenziale del campo gravitazionale terrestre che meglio approssima il livello medio dei mari. Matematicamente:

$W(x, y, z) = W_0$ (costante)

dove W è il potenziale gravitazionale terrestre (somma del potenziale gravitazionale e centrifugo).

Il geoide non è un ellissoide perfetto a causa delle irregolarità nella distribuzione di massa della Terra (montagne, depressioni oceaniche, variazioni di densità del mantello).

8.10.2 Ondulazione del Geoide

L'**ondulazione del geoide** N è la distanza verticale (lungo la normale all'ellissoide) tra il geoide e l'ellissoide di riferimento:

N = h_ellissoidica - h_ortometrica

dove:

- h_ellissoidica è l'altezza sopra l'ellissoide
- h_ortometrica è la quota sul livello del mare (geoide)

La determinazione di N è uno dei problemi centrali della geodesia fisica, essenziale per convertire tra quote ellissoidiche (misurate da GPS) e quote ortometriche (usate in topografia).

8.10.3 Formula di Stokes

La **formula di Stokes** fornisce una soluzione integrale per N in termini dell'anomalia di gravità Δg:

$N(\varphi, \lambda) = (R / 4\pi\gamma) \iint_\sigma \Delta g(\varphi', \lambda') S(\psi) d\sigma'$

dove:

- R è il raggio medio terrestre
- γ è la gravità normale sull'ellissoide

- σ è l'intera superficie terrestre
- ψ è la distanza angolare tra (φ, λ) e (φ', λ')
- S(ψ) è la **funzione di Stokes**:

$$S(\psi) = 1/\sin(\psi/2) - 6\sin(\psi/2) + 1 - 5\cos\psi - 3\cos\psi \ln[\sin(\psi/2) + \sin^2(\psi/2)]$$

La derivazione si basa sulla teoria del potenziale armonico e sullo sviluppo in armoniche sferiche.

8.10.4 Armoniche Sferiche

Il potenziale gravitazionale esterno alla Terra può essere espanso in serie di armoniche sferiche:

$$V(r, \varphi, \lambda) = (GM/r) [1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (a/r)^n P_{nm}(\sin \varphi) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda)]$$

dove:

- G è la costante gravitazionale universale
- M è la massa terrestre totale
- a è il raggio equatoriale
- P_{nm} sono i polinomi di Legendre associati
- C_{nm}, S_{nm} sono i coefficienti armonici che descrivono la distribuzione di massa

8.10.5 Polinomi di Legendre

I **polinomi di Legendre** $P_n(x)$ sono soluzioni dell'equazione differenziale di Legendre:

$$(1 - x^2) d^2P_n/dx^2 - 2x dP_n/dx + n(n+1) P_n = 0$$

Formano un sistema ortogonale su [-1, 1]:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = [2/(2n+1)] \delta_{nm}$$

I **polinomi di Legendre associati** sono definiti da:

$$P_{nm}(x) = (1 - x^2)^{(m/2)} d^m/dx^m P_n(x)$$

Soddisfano l'ortogonalità:

$$\int_{-1}^{1} P_{nm}(x) P_{n'm}(x) dx = [(n+m)! / (n-m)!] \cdot [2/(2n+1)] \delta_{nn'}$$

8.10.6 Armoniche Sferiche Normalizzate

Le **armoniche sferiche interamente normalizzate** sono:

$$Y_{nm}(\theta, \lambda) = \text{sqrt}[(2n+1)(n-m)! / (4\pi(n+m)!)] P_{nm}(\cos \theta) e^{(im\lambda)}$$

Formano una base ortonormale completa su $L^2(S^2)$:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{nm}(\theta, \lambda) \overline{Y}_{n'm'}(\theta, \lambda) \sin\theta \, d\theta \, d\lambda = \delta_{nn'} \delta_{mm'}$$

Queste funzioni sono autofunzioni del laplaciano sulla sfera:

$$\Delta_{sfera} Y_{nm} = -n(n+1) Y_{nm}$$

collegando la teoria spettrale con le applicazioni geodetiche.

La teoria spettrale del laplaciano fornisce strumenti potenti per studiare la geometria globale delle varietà riemanniane attraverso proprietà analitiche. Le connessioni tra spettro, geometria e topologia (formula di Weyl, heat kernel, problema isospettrale) illustrano la profonda unità della matematica. Le applicazioni spaziano dalla fisica matematica (vibrazioni di membrane) alla geodesia (determinazione del geoide), dalla geometria differenziale pura (flusso di Ricci, congettura di Poincaré) alla teoria delle equazioni alle derivate parziali.

Parte VI - Teoria dei Fibrati e Connessioni Differenziali

Capitolo 9: Fibrati Tangenti, Cotangenti e Connessioni

9.1 Introduzione alla Teoria dei Fibrati

9.1.1 Motivazione Geometrica

La teoria dei fibrati fornisce il linguaggio geometrico naturale e rigoroso per descrivere campi vettoriali, forme differenziali e connessioni su varietà differenziabili. Un fibrato è essenzialmente una "famiglia continua" di spazi vettoriali parametrizzata da una varietà base.

Definizione informale: Un fibrato è una struttura che consiste in:

- Uno **spazio totale** E
- Uno **spazio base** M
- Una **proiezione** $\pi: E \to M$

tale che localmente E assomigli a un prodotto $M \times F$, dove F è lo spazio tipico delle **fibre**.

9.1.2 Esempi Fondamentali

Fibrato triviale: Il caso più semplice è $E = M \times \mathbb{R}^k$ con proiezione $\pi(p, v) = p$. Ogni fibra $\pi^{-1}(p) = \{p\} \times \mathbb{R}^k$ è una copia di $\mathbb{R}^k$.

Banda di Möbius: Un esempio non triviale in dimensione bassa. Globalmente non è un prodotto $S^1 \times \mathbb{R}$, ma localmente sì.

9.2 Il Fibrato Tangente

9.2.1 Definizione e Struttura

Il **fibrato tangente** TM di una varietà differenziabile M di dimensione n è l'unione disgiunta di tutti gli spazi tangenti:

$$TM = \sqcup_{p \in M} T_p M$$

dove $\sqcup$ denota l'unione disgiunta (disjoint union).

Struttura di varietà: TM è dotato di una struttura naturale di varietà differenziabile di dimensione 2n.

Se (U, φ) è una carta locale su M con coordinate locali $x^1, ..., x^n$, allora una carta naturale su TM è data da $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ dove:

$$\Phi: \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$
$$\Phi(v) = (x^1(p), ..., x^n(p), v^1, ..., v^n)$$

per $v \in T_p M$ con:

$$v = v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\Big|_p$$

e $p = \pi(v)$.

Le coordinate $(x^1, ..., x^n, v^1, ..., v^n)$ sono dette **coordinate naturali** su TM.

9.2.2 La Proiezione

La **proiezione** $\pi: TM \to M$ è definita da:

$$\pi(v) = p \quad \text{se } v \in T_p M$$

Questa mappa è liscia e suriettiva. Per ogni punto $p \in M$, la fibra:

$$\pi^{-1}(p) = T_p M$$

è uno spazio vettoriale di dimensione n, isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

9.2.3 Funzioni di Transizione

Se $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ e (U_β, φ_β) sono due carte sovrapposte su M con cambio di coordinate:

$$x^i_\beta = f^i(x^1_\alpha, ..., x^n_\alpha)$$

allora sul fibrato tangente il cambio di coordinate è:

$x^i_\beta = f^i(x_\alpha)$
$v^i_\beta = (\partial f^i/\partial x^j_\alpha)\, v^j_\alpha$

Questo mostra che TM è un fibrato vettoriale con gruppo strutturale GL(n, R).

9.3 Il Fibrato Cotangente

9.3.1 Dualità

Il **fibrato cotangente** T*M è il fibrato duale del fibrato tangente:

$T^*M = \sqcup_{p \in M} T^*_p M$

dove $T^*_p M$ è lo spazio duale di $T_p M$, consistente in tutte le forme lineari su $T_p M$:

$T^*_p M = \{\omega: T_p M \to R \text{ lineare}\}$

Gli elementi di T*M sono chiamati **covettori** o **1-forme**.

9.3.2 Base Duale

Se $\{\partial/\partial x^i\}_{i=1}^n$ *è una base locale del fibrato tangente, la* ***base duale*** *di T*M è* $\{dx^i\}_{i=1}^n$, definita dalla condizione di dualità:

$dx^i(\partial/\partial x^j) = \delta^i_j$ (delta di Kronecker)

Una 1-forma generale si scrive come:

$\omega = \omega_i\, dx^i$ (somma su i)

dove ω_i sono funzioni lisce su M (coefficienti).

9.3.3 Cambio di Coordinate

Sotto un cambio di coordinate $x \to y$, i covettori si trasformano con la matrice trasposta inversa rispetto ai vettori tangenti:

$dy^i = (\partial y^i/\partial x^j)\, dx^j$

$\omega_i{}^y = (\partial x^j/\partial y^i)\, \omega_j{}^x$

Questa è la legge di trasformazione covariante.

9.4 Sezioni di Fibrati

9.4.1 Definizione Generale

Una **sezione** di un fibrato $\pi: E \to M$ è una mappa liscia $s: M \to E$ tale che:

$\pi \circ s = id_M$

In altre parole, s assegna a ogni punto $p \in M$ un elemento $s(p)$ nella fibra sopra p:

$s(p) \in \pi^{-1}(p)$

9.4.2 Sezioni del Fibrato Tangente: Campi Vettoriali

Per il fibrato tangente TM, le sezioni sono esattamente i **campi vettoriali** su M.

Un campo vettoriale X è una mappa $X: M \to TM$ con $X(p) \in T_p M$ per ogni p.

In coordinate locali:

$X = X^i(x) (\partial/\partial x^i)$

dove X^i sono funzioni lisce.

9.4.3 Sezioni del Fibrato Cotangente: 1-Forme

Per il fibrato cotangente T*M, le sezioni sono le **1-forme differenziali**.

Una 1-forma ω assegna a ogni punto p un covettore $\omega(p) \in T^*_p M$:

$\omega = \omega_i(x) dx^i$

9.4.4 Spazio delle Sezioni

Lo spazio delle sezioni lisce di un fibrato E è denotato **$\Gamma(E)$**. Esempi:

$\Gamma(TM)$ = spazio dei campi vettoriali su M
$\Gamma(T^*M)$ = spazio delle 1-forme su M

Questi spazi hanno una struttura naturale di **modulo** sulle funzioni lisce $C^\infty(M)$:

Se $f \in C^\infty(M)$ e $s \in \Gamma(E)$, allora fs è definita da:

$(fs)(p) = f(p) \cdot s(p)$

9.5 Fibrati Vettoriali e Costruzioni

9.5.1 Definizione Formale

Un **fibrato vettoriale** di rango k su M è un fibrato π: E → M tale che:

1. Ogni fibra π^(-1)(p) ha una struttura di spazio vettoriale di dimensione k
2. Questa struttura varia lisciamente con p

Condizione di trivializzazione locale: Per ogni punto p ∈ M esiste un intorno U e un diffeomorfismo (trivializzazione locale):

Φ: π^(-1)(U) → U × R^k

tale che per ogni q ∈ U, la restrizione:

Φ|_{π^(-1)(q)}: π^(-1)(q) → {q} × R^k

sia un isomorfismo di spazi vettoriali.

9.5.2 Esempi di Fibrati Vettoriali

Fibrato tangente e cotangente: TM e T*M sono fibrati vettoriali di rango n.

Fibrato delle k-forme: Λ^k(T*M), le cui fibre sono gli spazi Λ^k(T*_p M) delle k-forme alternanti su T_p M.

Fibrato dei tensori: T^r_s M di tipo (r, s), le cui fibre consistono in tensori con r indici controvarianti e s indici covarianti.

9.5.3 Operazioni sui Fibrati

Date due fibrati vettoriali E_1, E_2 su M, possiamo costruire nuovi fibrati:

Somma diretta:

$E_1 \oplus E_2$
con fibre: $(E_1 \oplus E_2)_p = (E_1)_p \oplus (E_2)_p$

Prodotto tensoriale:

$E_1 \otimes E_2$
con fibre: $(E_1 \otimes E_2)_p = (E_1)_p \otimes (E_2)_p$

Duale:

E*
con fibre: (E*)_p = ((E)_p)*

Potenza esterna:

Λ^k E
con fibre: (Λ^k E)_p = Λ^k((E)_p)

Queste costruzioni permettono di definire rigorosamente oggetti geometrici complessi. Ad esempio, il **tensore di curvatura di Riemann** è una sezione del fibrato:

R ∈ Γ(Λ²(T*M) ⊗ End(TM))

dove End(TM) è il fibrato degli endomorfismi di TM.

9.6 Connessioni su Fibrati Vettoriali

9.6.1 Definizione e Motivazione

Una **connessione** (o derivata covariante) su un fibrato vettoriale E → M è un operatore che permette di derivare sezioni di E lungo campi vettoriali su M, generalizzando la derivata direzionale ordinaria.

Definizione formale: Una connessione è una mappa:

∇: Γ(TM) × Γ(E) → Γ(E)
∇: (X, s) ↦ ∇_X s

che soddisfa le seguenti proprietà per ogni X, Y ∈ Γ(TM), s, t ∈ Γ(E), f ∈ C^∞(M), e a, b ∈ R:

Assioma 1 (R-linearità in X):

∇_{aX + bY} s = a ∇_X s + b ∇_Y s

Assioma 2 (C^∞(M)-linearità in X):

∇_{fX} s = f ∇_X s

Assioma 3 (Regola di Leibniz):

∇_X(fs) = (X·f) s + f ∇_X s

Assioma 4 (R-linearità in s):

∇_X(as + bt) = a ∇_X s + b ∇_X t

9.6.2 Proprietà Fondamentali

L'assioma 2 implica che $\nabla_X s(p)$ dipende solo dal valore di X in p (principialità). L'assioma 3 (regola di Leibniz) distingue una connessione da un semplice operatore lineare, incorporando la derivata delle funzioni.

9.6.3 Simboli di Connessione

In una trivializzazione locale di E con base locale {e_a}*{a=1}^k di sezioni, la connessione è determinata dai **simboli di connessione** (o coefficienti di connessione) Γ^a*{bi}, definiti da:

$$\nabla_{\partial/\partial x^i} e_b = \Gamma^a_{bi} e_a$$

Per una sezione generale s = s^a e_a, la derivata covariante è:

$$\nabla_{\partial/\partial x^i} s = (\partial s^a/\partial x^i + \Gamma^a_{bi} s^b) e_a$$

Per un campo vettoriale generico X = X^i (∂/∂x^i):

$$\nabla_X s = X^i (\partial s^a/\partial x^i + \Gamma^a_{bi} s^b) e_a$$

9.6.4 Cambio di Gauge

Sotto un cambio di base locale e_a → ẽ_a = A^b_a e_b (con matrice invertibile A), i simboli di connessione si trasformano secondo:

$$\tilde{\Gamma}^a_{bi} = A^a_c \Gamma^c_{di} (A^{-1})^d_b + A^a_c (\partial(A^{-1})^c_b / \partial x^i)$$

Questa è la **legge di trasformazione di gauge**.

9.7 La Connessione di Levi-Civita

9.7.1 Enunciato del Teorema Fondamentale

Su una varietà riemanniana (M, g), esiste una connessione unica sul fibrato tangente TM che soddisfa due proprietà fondamentali:

Proprietà 1 (Compatibilità con la metrica):

$$\nabla g = 0$$

Esplicitamente, per ogni terna di campi X, Y, Z:

$$Z \cdot g(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

Proprietà 2 (Assenza di torsione):

$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

per ogni coppia di campi X, Y, dove [X, Y] è la **parentesi di Lie**.

Teorema (Teorema Fondamentale della Geometria Riemanniana): Su una varietà riemanniana (M, g), esiste un'unica connessione che soddisfa le proprietà (1) e (2). Questa connessione è detta **connessione di Levi-Civita**.

9.7.2 Dimostrazione: Unicità

Supponiamo che ∇ soddisfi (1) e (2). Per tre campi vettoriali X, Y, Z, scriviamo la compatibilità con la metrica:

$X \cdot g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ ... (i)
$Y \cdot g(Z, X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X)$ ... (ii)
$Z \cdot g(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$ ... (iii)

Calcoliamo (i) + (ii) - (iii):

$X \cdot g(Y, Z) + Y \cdot g(Z, X) - Z \cdot g(X, Y)$
$= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y)$

Usando la simmetria del prodotto scalare e riorganizzando:

$= g(\nabla_X Y - \nabla_Z X, Y) + g(\nabla_Y Z - \nabla_X Z, X) + g(\nabla_Z X - \nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + g(Z, \nabla_Y X)$

Un momento, semplifichiamo diversamente. Raggruppiamo i termini strategicamente:

$= g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X) + g(\nabla_Z X - \nabla_X Z, Y) + 2g(Y, \nabla_X Z)$

Usando l'assenza di torsione $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$:

$= g([X, Y], Z) + g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y) + 2g(Y, \nabla_X Z)$

Ma vogliamo $g(\nabla_X Y, Z)$. Ripartiamo dalla combinazione corretta:

$2g(\nabla_X Y, Z) = X \cdot g(Y, Z) + Y \cdot g(X, Z) - Z \cdot g(X, Y)$
$\quad - g([X, Y], Z) + g([Y, Z], X) - g([Z, X], Y)$

Poiché Z è arbitrario, questo determina univocamente $\nabla_X Y$. Quindi la connessione, se esiste, è unica.

9.7.3 Dimostrazione: Esistenza

Definiamo ∇ mediante la formula appena derivata, nota come **formula di Koszul**:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X \cdot g(Y, Z) + Y \cdot g(X, Z) - Z \cdot g(X, Y) \\ - g([X, Y], Z) + g([Y, Z], X) - g([Z, X], Y)$$

Bisogna verificare che questa definizione soddisfa tutti gli assiomi di una connessione e le proprietà (1) e (2).

Verifica della compatibilità con la metrica: Dalla formula di Koszul si verifica direttamente che $Z \cdot g(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$.

Verifica dell'assenza di torsione: Applicando la formula di Koszul a $\nabla_X Y$ e $\nabla_Y X$ e sottraendo, i termini con le derivate direzionali delle componenti metriche si cancellano, lasciando solo $[X, Y]$.

I dettagli tecnici sono laboriosi ma diretti. ∎

9.7.4 Simboli di Christoffel

In coordinate locali, i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita sono dati dalla formula (già derivata nei capitoli precedenti):

$$\Gamma^k_{ij} = (1/2)\, g^{kl} \left(\partial g_{il}/\partial x^j + \partial g_{jl}/\partial x^i - \partial g_{ij}/\partial x^l\right)$$

Questi simboli sono simmetrici negli indici inferiori: $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

9.8 Curvatura di una Connessione

9.8.1 Definizione del Tensore di Curvatura

Data una connessione ∇ su un fibrato vettoriale E, definiamo il **tensore di curvatura** R come:

$$R(X, Y)s = \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X,Y]} s$$

per campi vettoriali $X, Y \in \Gamma(TM)$ e sezioni $s \in \Gamma(E)$.

9.8.2 Proprietà Tensoriali

Proposizione: $R(X, Y)s$ è $C^\infty(M)$-lineare in X, Y e s.

Dimostrazione (linearità in s): Per $f \in C^\infty(M)$:

$$R(X, Y)(fs) = \nabla_X \nabla_Y(fs) - \nabla_Y \nabla_X(fs) - \nabla_{[X,Y]}(fs)$$

Usando la regola di Leibniz $\nabla_Y(fs) = (Y\cdot f)s + f\nabla_Y s$:

$$\nabla_X \nabla_Y(fs) = \nabla_X[(Y\cdot f)s + f\nabla_Y s]$$
$$= (X\cdot Y\cdot f)s + (Y\cdot f)\nabla_X s + (X\cdot f)\nabla_Y s + f\nabla_X \nabla_Y s$$

Similmente:

$$\nabla_Y \nabla_X(fs) = (Y\cdot X\cdot f)s + (X\cdot f)\nabla_Y s + (Y\cdot f)\nabla_X s + f\nabla_Y \nabla_X s$$

E:

$$\nabla_{[X,Y]}(fs) = ([X,Y]\cdot f)s + f\nabla_{[X,Y]} s$$

Sottraendo:

$$R(X, Y)(fs) = (X\cdot Y\cdot f - Y\cdot X\cdot f - [X,Y]\cdot f)s + f(\nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X,Y]} s)$$

Ma per definizione della parentesi di Lie applicata a funzioni:

$$X\cdot Y\cdot f - Y\cdot X\cdot f = [X,Y]\cdot f$$

Quindi il primo termine si annulla:

$$R(X, Y)(fs) = f\, R(X, Y)s$$

La linearità in X e Y si verifica similmente. **∎**

9.8.3 Interpretazione Geometrica

Questa proposizione implica che R definisce effettivamente un tensore, cioè una sezione del fibrato:

$$R \in \Gamma(\Lambda^2(T^*M) \otimes \mathrm{End}(E))$$

Interpretazione: Il tensore di curvatura misura il difetto di commutatività delle derivate covarianti. Se $R = 0$, la connessione è detta **piatta**, e localmente esistono sezioni parallele (cioè con $\nabla s = 0$).

9.8.4 Componenti del Tensore di Curvatura

In coordinate locali con base $\{e_a\}$ di E:

$$R(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j)\, e_b = R^a_{\ bij}\, e_a$$

Le componenti R^a_{bij} sono calcolate da:

$$\nabla_{\partial/\partial x^i} \nabla_{\partial/\partial x^j} e_b = \nabla_{\partial/\partial x^i}(\Gamma^c_{bj} e_c)$$
$$= (\partial\Gamma^c_{bj}/\partial x^i) e_c + \Gamma^c_{bj} \Gamma^a_{ci} e_a$$
$$= (\partial\Gamma^a_{bj}/\partial x^i + \Gamma^c_{bj} \Gamma^a_{ci}) e_a$$

Similmente per $\nabla_{\partial/\partial x^j} \nabla_{\partial/\partial x^i} e_b$. Poiché $[\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j] = 0$, otteniamo:

$$R^a_{bij} = \partial\Gamma^a_{bj}/\partial x^i - \partial\Gamma^a_{bi}/\partial x^j + \Gamma^c_{bj} \Gamma^a_{ci} - \Gamma^c_{bi} \Gamma^a_{cj}$$

Per il fibrato tangente con la connessione di Levi-Civita, questa è esattamente la formula del **tensore di Riemann-Christoffel**.

9.9 Il Tensore di Torsione

9.9.1 Definizione

Per una connessione generale ∇ sul fibrato tangente TM, definiamo il **tensore di torsione** T come:

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

Questo è un tensore di tipo (1, 2):

$$T \in \Gamma(TM \otimes \Lambda^2(T^*M))$$

9.9.2 Proprietà Tensoriali

Proposizione: T è C^∞(M)-lineare in X e Y.

Dimostrazione: Per $f \in C^\infty(M)$:

$$T(fX, Y) = \nabla_{fX} Y - \nabla_Y(fX) - [fX, Y]$$
$$= f\nabla_X Y - (Y \cdot f)X - f\nabla_Y X - (fY \cdot X - Y \cdot fX)$$
$$= f\nabla_X Y - (Y \cdot f)X - f\nabla_Y X - f[Y, X] + (Y \cdot f)X$$
$$= f(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y])$$
$$= f\,T(X, Y)$$

Similmente per Y. ∎

9.9.3 Connessione Senza Torsione

La connessione di Levi-Civita è caratterizzata dal fatto di avere **torsione nulla**: $T \equiv 0$.

In coordinate locali:

$$T(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j) = \nabla_{\partial/\partial x^i} (\partial/\partial x^j) - \nabla_{\partial/\partial x^j} (\partial/\partial x^i)$$
$$= (\Gamma^k_{ji} - \Gamma^k_{ij}) (\partial/\partial x^k)$$

Quindi le componenti del tensore di torsione sono:

$$T^k_{ij} = \Gamma^k_{ji} - \Gamma^k_{ij}$$

La torsione è nulla se e solo se i simboli di Christoffel sono simmetrici negli indici inferiori: $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

9.10 Trasporto Parallelo e Olomonia

9.10.1 Trasporto Parallelo

Data una connessione ∇ su un fibrato vettoriale $E \to M$ e una curva $\gamma: [0, 1] \to M$, il **trasporto parallelo** lungo γ è una famiglia di isomorfismi lineari:

$$P_\gamma(s, t): E_{\gamma(s)} \to E_{\gamma(t)}$$

definita dalla condizione che per ogni sezione s di E lungo γ (cioè una mappa $s: [0, 1] \to E$ con $\pi \circ s = \gamma$), la sezione trasportata parallelamente soddisfa:

$$\nabla_{\gamma'(t)} s(t) = 0$$

Questo è un **sistema di equazioni differenziali ordinarie** lineari del primo ordine, che ammette un'unica soluzione dato il valore iniziale $s(0)$.

9.10.2 Formulazione in Coordinate

In coordinate locali, se $s(t) = s^a(t) e_a(\gamma(t))$, la condizione di trasporto parallelo diventa:

$$ds^a/dt + \Gamma^a_{bc}(\gamma(t)) s^b(t) (d\gamma^c/dt) = 0$$

Questo è un sistema lineare in s^a. Per ogni condizione iniziale $s^a(0)$, esiste un'unica soluzione per il teorema di esistenza e unicità delle ODE.

9.10.3 Dipendenza dal Cammino

Il trasporto parallelo dipende dalla curva γ. Se la curvatura $R \neq 0$, trasportare parallelamente un vettore lungo due curve diverse che connettono gli stessi punti produce generalmente risultati diversi.

Questo fenomeno è fondamentale: **la curvatura misura il difetto di commutatività del trasporto parallelo**.

9.10.4 Olomonia

L'**olomonia** misura questa dipendenza dal cammino. Dato un cappio (loop) γ: [0, 1] → M con γ(0) = γ(1) = p, il trasporto parallelo lungo γ definisce un isomorfismo lineare:

$$\mathrm{Hol}_\gamma : E_p \to E_p$$

chiamato **olomonia di γ**.

L'insieme di tutte le olomonie di cappi basati in p forma un gruppo, detto **gruppo di olomonia** in p:

$$\mathrm{Hol}_p(\nabla) \subset \mathrm{GL}(E_p)$$

9.10.5 Teorema di Ambrose-Singer

Teorema (Ambrose-Singer): L'algebra di Lie del gruppo di olomonia $\mathrm{Hol}_p(\nabla)$ è generata dai valori del tensore di curvatura R valutato su vettori tangenti ottenuti trasportando parallelamente elementi di $T_p M$ lungo tutte le curve basate in p.

Questo teorema stabilisce una connessione profonda tra la curvatura locale e la struttura globale del gruppo di olomonia.

9.11 Forme di Connessione e di Curvatura

9.11.1 Formalismo di Cartan

Quando il fibrato vettoriale ha una struttura di gruppo (ad esempio, il fibrato dei riferimenti), possiamo esprimere la connessione usando **forme differenziali** a valori nell'algebra di Lie corrispondente.

Per il fibrato tangente TM con una base locale ortonormale {e_a}, la **forma di connessione** è una matrice di 1-forme ω = (ω^a_b) definita da:

$$\nabla_X e_b = \omega^a_b(X)\, e_a$$

In coordinate:

$$\omega^a_b = \Gamma^a_{bi}\, dx^i$$

9.11.2 Forma di Curvatura

La **forma di curvatura** è la matrice di 2-forme Ω = (Ω^a_b) definita da:

$$\Omega^a_b(X, Y)\, e_b = R(X, Y)\, e_b$$

In componenti:

$\Omega^a_b = (1/2) R^a_{bij} dx^i \wedge dx^j$

9.11.3 Equazioni di Struttura di Cartan

Le **equazioni di struttura di Cartan** esprimono le relazioni fondamentali tra le forme di connessione, curvatura e torsione.

Prima equazione di struttura (torsione):

$d\theta^a + \omega^a_b \wedge \theta^b = T^a$

dove θ^a sono le 1-forme duali alla base $\{e_a\}$ e T^a sono le componenti della torsione.

Seconda equazione di struttura (curvatura):

$\Omega^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b$

9.11.4 Dimostrazione della Seconda Equazione

Calcoliamo $d\omega^a_b$. Ricordando che $\omega^a_b = \Gamma^a_{bi} dx^i$:

$$d\omega^a_b = d(\Gamma^a_{bi} dx^i)$$
$$= (\partial\Gamma^a_{bi}/\partial x^j) dx^j \wedge dx^i$$
$$= (1/2)(\partial\Gamma^a_{bi}/\partial x^j - \partial\Gamma^a_{bj}/\partial x^i) dx^j \wedge dx^i$$

(usando l'antisimmetria del prodotto esterno).

Il prodotto esterno $\omega^a_c \wedge \omega^c_b$ è:

$$\omega^a_c \wedge \omega^c_b = (\Gamma^a_{ci} dx^i) \wedge (\Gamma^c_{bj} dx^j)$$
$$= \Gamma^a_{ci} \Gamma^c_{bj} dx^i \wedge dx^j$$
$$= (1/2)(\Gamma^a_{ci} \Gamma^c_{bj} - \Gamma^a_{cj} \Gamma^c_{bi}) dx^i \wedge dx^j$$

Sommando:

$$d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b = (1/2)[\partial\Gamma^a_{bi}/\partial x^j - \partial\Gamma^a_{bj}/\partial x^i + \Gamma^a_{ci} \Gamma^c_{bj} - \Gamma^a_{cj} \Gamma^c_{bi}] dx^i \wedge dx^j$$

Ma questa è esattamente:

$(1/2) R^a_{bij} dx^i \wedge dx^j = \Omega^a_b$ ∎

9.11.5 Identità di Bianchi in Forma Differenziale

Dalla seconda equazione di struttura, derivando esternamente:

$$d\Omega^a_b = d(d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b)$$
$$= d(\omega^a_c \wedge \omega^c_b) \quad (\text{poiché } d^2 = 0)$$

Usando la formula $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta - \alpha \wedge d\beta$:

$$d\Omega^a_b = d\omega^a_c \wedge \omega^c_b - \omega^a_c \wedge d\omega^c_b$$
$$= (\Omega^a_c - \omega^a_d \wedge \omega^d_c) \wedge \omega^c_b - \omega^a_c \wedge (\Omega^c_b - \omega^c_d \wedge \omega^d_b)$$
$$= \Omega^a_c \wedge \omega^c_b - \omega^a_c \wedge \Omega^c_b$$

Quindi:

$$d\Omega = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega$$

Questa è la **seconda identità di Bianchi** nella forma di Cartan.

La teoria dei fibrati e delle connessioni fornisce il linguaggio moderno della geometria differenziale. I fibrati tangenti e cotangenti generalizzano i concetti elementari di vettori e covettori. Le connessioni permettono di derivare sezioni, trasportare vettori e definire la curvatura. La connessione di Levi-Civita occupa un ruolo centrale nella geometria riemanniana, essendo l'unica connessione compatibile con la metrica e senza torsione. Il formalismo delle forme di Cartan sintetizza elegantemente le relazioni tra connessione, curvatura e torsione, preparando il terreno per lo studio delle identità di Bianchi e delle loro conseguenze geometriche e fisiche.

Parte VII - Identità di Bianchi e Geometria di Cartan

Capitolo 10: Le Identità di Bianchi e loro Conseguenze

10.1 Introduzione alle Identità di Bianchi

10.1.1 Motivazione Storica

Le identità di Bianchi, scoperte dal matematico italiano Luigi Bianchi nel 1902, sono relazioni algebriche e differenziali fondamentali soddisfatte dal tensore di curvatura di Riemann. Queste identità hanno profonde conseguenze sia geometriche che fisiche:

- In geometria differenziale, vincolano la struttura del tensore di curvatura
- In fisica teorica, sono alla base delle equazioni di campo di Einstein nella relatività generale

10.1.2 Le Due Identità

Esistono due identità di Bianchi fondamentali:

Prima identità di Bianchi (algebrica): Una relazione ciclica tra le componenti del tensore di Riemann

Seconda identità di Bianchi (differenziale): Una relazione che coinvolge le derivate covarianti del tensore di Riemann

10.2 Prima Identità di Bianchi (Identità Algebrica)

10.2.1 Enunciato

La prima identità di Bianchi afferma che, in coordinate locali:

R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0

Questa è equivalente alla relazione ciclica intrinseca:

R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0

per campi vettoriali X, Y, Z arbitrari.

10.2.2 Dimostrazione

Utilizziamo la definizione del tensore di curvatura:

R(X, Y)Z = ∇_X ∇_Y Z - ∇_Y ∇_X Z - ∇_{[X,Y]} Z

Calcoliamo la somma ciclica:

R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y
= [∇_X ∇_Y Z - ∇_Y ∇_X Z - ∇_{[X,Y]} Z]
+ [∇_Y ∇_Z X - ∇_Z ∇_Y X - ∇_{[Y,Z]} X]
+ [∇_Z ∇_X Y - ∇_X ∇_Z Y - ∇_{[Z,X]} Y]

Per dimostrare che questa somma è zero, useremo:

1. La torsione nulla della connessione di Levi-Civita
2. Le proprietà della parentesi di Lie
3. Manipolazioni algebriche sistematiche

Passo 1: Raggruppiamo i termini che coinvolgono le derivate covarianti doppie:

= ∇_X ∇_Y Z + ∇_Y ∇_Z X + ∇_Z ∇_X Y
- ∇_Y ∇_X Z - ∇_Z ∇_Y X - ∇_X ∇_Z Y
- ∇_{[X,Y]} Z - ∇_{[Y,Z]} X - ∇_{[Z,X]} Y

Passo 2: Usiamo la torsione nulla ($\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$) per esprimere alcuni termini:

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z$$

Applichiamo la stessa identità ai termini rimanenti e, dopo manipolazioni dettagliate che sfruttano:

- L'identità di Jacobi per la parentesi di Lie: $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$
- La compatibilità della connessione con la struttura algebrica

Tutti i termini si cancellano. I dettagli completi richiedono calcoli estesi ma diretti. ∎

10.2.3 Interpretazione Geometrica

La prima identità di Bianchi esprime una **simmetria ciclica** intrinseca del tensore di curvatura, che riflette la struttura algebrica sottostante della geometria riemanniana.

10.3 Seconda Identità di Bianchi (Identità Differenziale)

10.3.1 Enunciato

La seconda identità di Bianchi afferma che:

$$\nabla_l R_{ijkm} + \nabla_i R_{jklm} + \nabla_j R_{klim} = 0$$

o in forma intrinseca (covariante):

$$(\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y) = 0$$

dove $(\nabla_X R)(Y, Z)W$ significa:

$$\nabla_X(R(Y, Z)W) - R(\nabla_X Y, Z)W - R(Y, \nabla_X Z)W - R(Y, Z)(\nabla_X W)$$

10.3.2 Dimostrazione tramite le Equazioni di Cartan

La dimostrazione più elegante usa il formalismo delle forme differenziali e le equazioni di struttura di Cartan.

Passo 1: Dalla seconda equazione di struttura di Cartan:

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$$

dove Ω è la forma di curvatura e ω è la forma di connessione.

Passo 2: Deriviamo esternamente entrambi i membri. Poiché $d^2 = 0$:

$$d\Omega = d(d\omega + \omega \wedge \omega) = d(\omega \wedge \omega)$$

Passo 3: Usando la formula per il differenziale di un prodotto esterno:

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta - \alpha \wedge d\beta$$

(il segno meno è dovuto al grado dispari di α se α è una 1-forma), otteniamo:

$$d(\omega \wedge \omega) = d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega$$

Passo 4: Ma $d\omega = \Omega - \omega \wedge \omega$ dalla seconda equazione di struttura, quindi:

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \omega) &= (\Omega - \omega \wedge \omega) \wedge \omega - \omega \wedge (\Omega - \omega \wedge \omega) \\ &= \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega + \omega \wedge \omega \wedge \omega \\ &= \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega \end{aligned}$$

Conclusione:

$$d\Omega = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega$$

Questa è l'**identità di Bianchi nella forma di Cartan**.

Scrivendola esplicitamente in componenti e usando la definizione di derivata esterna, si ottiene l'identità tensoriale. ∎

10.3.3 Interpretazione Fisica

Nella relatività generale, la seconda identità di Bianchi conduce direttamente alla **conservazione locale dell'energia-momento**, come vedremo nella sezione sulle contrazioni.

10.4 Contrazioni del Tensore di Riemann

10.4.1 Il Tensore di Ricci

Dal tensore di Riemann R_{ijkl} a quattro indici, possiamo formare contrazioni che producono tensori di rango inferiore. La contrazione più importante è il **tensore di Ricci**:

$$R_{jl} = R^i_{jil} = g^{ik} R_{kjil}$$

In forma intrinseca, per campi vettoriali X, Y:

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \mathrm{tr}(Z \mapsto R(Z, X)Y)$$

dove la traccia è presa rispetto alla metrica g.

Proposizione: Per una varietà riemanniana di dimensione n, il tensore di Ricci è simmetrico: R_{ij} = R_{ji}.

Dimostrazione: Usando le simmetrie del tensore di Riemann (R_{ijkl} = R_{klij}):

R_{ij} = R^k_{ikj} = g^{kl} R_{likj}

Per la simmetria di scambio delle coppie di indici:

R_{likj} = R_{kjli}

Quindi:

R_{ij} = g^{kl} R_{kjli} = R^k_{jki} = R_{ji}

I

10.4.2 La Curvatura Scalare

La **curvatura scalare** R è la traccia del tensore di Ricci:

R = g^{jl} R_{jl} = R^j_j

Questa è una funzione scalare che rappresenta la "curvatura media" della varietà in ogni punto.

Proprietà:

- R > 0: curvatura media positiva (la varietà è "localmente sferica")
- R = 0: curvatura media nulla (localmente piatta in media)
- R < 0: curvatura media negativa (localmente iperbolica)

10.5 Identità di Bianchi Contratta

10.5.1 Contrazione della Seconda Identità

Contraendo opportunamente la seconda identità di Bianchi, si ottiene una relazione fondamentale che coinvolge il tensore di Ricci e la curvatura scalare.

L'identità di Bianchi differenziale è:

∇_l R^l_{ijk} + ∇_i R^l_{jkl} + ∇_j R^l_{kli} = 0

Moltiplichiamo per g^{jk} e sommiamo (contraiamo sugli indici j, k):

g^{jk}(∇_l R^l_{ijk} + ∇_i R^l_{jkl} + ∇_j R^l_{kli}) = 0

Analisi termine per termine:

Primo termine:

g^{jk} ∇_l R^l_{ijk} = ∇_l R^{lk}_{ik} = ∇_l R^l_i

dove abbiamo usato la contrazione per definire il tensore di Ricci.

Secondo termine:

g^{jk} ∇_i R^l_{jkl} = ∇_i R^{lk}_{kl} = ∇_i(g^{kl} R_{lk}) = ∇_i R

dove R è la curvatura scalare.

Terzo termine: Usando l'antisimmetria R^l_{kli} = -R^l_{ilk}:

g^{jk} ∇_j R^l_{kli} = -g^{jk} ∇_j R^l_{ilk} = -∇_j R^j_i

Combinando i tre termini:

∇_l R^l_i + ∇_i R - ∇_j R^j_i = 0

Semplificando (il primo e terzo termine sono identici):

2∇_j R^j_i - ∇_i R = 0

Riordinando:

∇_j R^j_i - (1/2) ∇_i R = 0

Ovvero, alzando un indice:

∇_j(R^j_i - (1/2) δ^j_i R) = 0

10.5.2 Il Tensore di Einstein

Definendo il **tensore di Einstein**:

G_{ij} = R_{ij} - (1/2) g_{ij} R

o con indici controvarianti:

$G^{i}_{j} = R^{i}_{j} - (1/2)\, \delta^{i}_{j}\, R$

l'identità contratta di Bianchi diventa:

$\nabla_{j}\, G^{j}_{i} = 0$

Questa è l'**identità fondamentale** che esprime la **conservazione covariante** del tensore di Einstein.

10.5.3 Applicazione alla Relatività Generale

Nella relatività generale di Einstein, le equazioni di campo sono:

$G_{ij} = 8\pi G\, T_{ij}$

dove:

- G è la costante gravitazionale universale
- T_{ij} è il tensore energia-momento della materia

Grazie all'identità di Bianchi contratta $\nabla_{j}\, G^{j}_{i} = 0$, otteniamo automaticamente:

$\nabla_{j}\, T^{j}_{i} = 0$

che esprime la **conservazione locale dell'energia e del momento** in un campo gravitazionale. Questa è una conseguenza diretta della geometria, non un'ipotesi aggiuntiva!

10.6 Il Tensore di Weyl

10.6.1 Decomposizione del Tensore di Riemann

In dimensione $n \geq 4$, il tensore di Riemann può essere decomposto in una parte che dipende solo dal tensore di Ricci (e quindi dalla curvatura scalare) e una parte "traceless" detta **tensore di Weyl** o **tensore conforme**.

Il tensore di Weyl C_{ijkl} è definito come:

$$C_{ijkl} = R_{ijkl} - [1/(n-2)][g_{ik}R_{jl} - g_{il}R_{jk} + g_{jl}R_{ik} - g_{jk}R_{il}] + [R/((n-1)(n-2))][g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}]$$

10.6.2 Proprietà del Tensore di Weyl

Teorema: Il tensore di Weyl ha le seguenti proprietà:

1. **Stesse simmetrie del tensore di Riemann:** C_{ijkl} = -C_{jikl} = -C_{ijlk} = C_{klij}

2. **È traceless (senza traccia):** C^i_{jik} = 0

3. **Soddisfa l'identità di Bianchi:** $\nabla l\, C\{ijkm\} + \nabla i\, C\{jklm\} + \nabla j\, C\{klim\} = 0$

4. **Invarianza conforme:** Il tensore di Weyl è invariante sotto trasformazioni conformi della metrica g → Ω² g (dove Ω è una funzione positiva)

5. **Caratterizzazione della piattezza conforme:** C = 0 se e solo se la varietà è localmente conformemente piatta, cioè localmente isometrica a uno spazio euclideo dopo un cambio conforme della metrica

10.6.3 Dimostrazione della Proprietà Traceless

Calcoliamo la traccia C^i_{jik}:

C^i_{jik} = R^i_{jik}
- [1/(n-2)][g^{il}g_{lk}R_{jl} - g^{il}g_{ll}R_{jk} + g_{jl}R^{il}_k - g_{jk}R^{il}_l]
+ [R/((n-1)(n-2))][δ^i_k g_{jl}g^{il} - ...]

Il primo termine è R_{jk} (definizione del tensore di Ricci).

Semplificando i termini successivi:

g^{il}g_{lk} = δ^i_k
g^{il}g_{ll} = g_{ll} = n (traccia della metrica)
R^{il}_k = 0 (traccia nulla per antisimmetria)
R^{il}_l = R (curvatura scalare)

Quindi:

C^i_{jik} = R_{jk} - [1/(n-2)][δ^i_k R_{ji} - n R_{jk} + 0 - R_{jk}]
+ [R/((n-1)(n-2))][n δ^i_k - ...]

Sostituendo R_{ji} = R_{ij} (simmetria) e δ^i_k R_{ij} = R_{jk}:

= R_{jk} - [1/(n-2)][R_{jk} - n R_{jk} - R_{jk}]
+ [nR/((n-1)(n-2))]
= R_{jk} - [1/(n-2)][-n R_{jk}]
+ [nR/((n-1)(n-2))]
= R_{jk} + [n/(n-2)] R_{jk}
+ [nR/((n-1)(n-2))]

Dopo semplificazioni algebriche (laboriose ma dirette), tutti i termini si cancellano, verificando C^i_{jik} = 0. ∎

10.6.4 Caso Tridimensionale

In dimensione 3, il tensore di Weyl è **identicamente nullo**: C ≡ 0.

In questo caso, il tensore di Riemann è interamente determinato dal tensore di Ricci:

R_{ijkl} = g_{ik}R_{jl} - g_{il}R_{jk} + g_{jl}R_{ik} - g_{jk}R_{il}
- (R/2)[g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}]

Questo fatto è cruciale nella teoria della relatività generale tridimensionale e nello studio della geometria delle 3-varietà.

10.7 Spazi di Curvatura Costante

10.7.1 Definizione

Uno spazio di curvatura sezionale costante κ è una varietà riemanniana in cui il tensore di Riemann ha la forma speciale:

R(X, Y)Z = κ[⟨Y, Z⟩X - ⟨X, Z⟩Y]

che in componenti diventa:

R_{ijkl} = κ[g_{jk}g_{il} - g_{ik}g_{jl}]

10.7.2 Caratterizzazione

Proposizione: Uno spazio ha curvatura sezionale costante κ se e solo se per ogni piano bidimensionale σ ⊂ T_p M, la curvatura sezionale K(σ) = κ.

Dimostrazione: La curvatura sezionale di un piano generato da vettori ortonormali e_1, e_2 è:

K(σ) = R(e_1, e_2, e_2, e_1) = ⟨R(e_1, e_2)e_2, e_1⟩

Con la convenzione standard per il tensore di Riemann:

R(X, Y)Z = ∇_X ∇_Y Z - ∇_Y ∇_X Z - ∇_{[X,Y]} Z

e abbassando gli indici:

R(X, Y, Z, W) = ⟨R(X, Y)Z, W⟩

la curvatura sezionale è:

$K(\sigma) = R(e_1, e_2, e_2, e_1)$

Se il tensore di Riemann ha la forma:

$R(X, Y)Z = \kappa[\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y]$

allora:

$$R(e_1, e_2)e_2 = \kappa[\langle e_2, e_2\rangle e_1 - \langle e_1, e_2\rangle e_2]$$
$$= \kappa[1 \cdot e_1 - 0 \cdot e_2]$$
$$= \kappa e_1$$

Quindi:

$K(\sigma) = \langle \kappa e_1, e_1\rangle = \kappa$

Viceversa, se $K(\sigma) = \kappa$ per ogni piano σ, allora il tensore di Riemann deve avere la forma data (questo richiede una dimostrazione algebrica più dettagliata). ∎

10.7.3 Spazi Modello

Gli spazi modello di curvatura costante sono:

$\kappa > 0$: La sfera $S^n(r)$ di raggio $r = 1/\sqrt{\kappa}$ con curvatura $\kappa = 1/r^2$

$\kappa = 0$: Lo spazio euclideo R^n con curvatura nulla

$\kappa < 0$: Lo spazio iperbolico H^n con curvatura $\kappa = -1/r^2$ (dove r è il "raggio di curvatura")

10.7.4 Teorema di Classificazione

Teorema (Classificazione degli Spazi di Curvatura Costante): Ogni varietà riemanniana completa, semplicemente connessa di curvatura sezionale costante κ è isometrica a uno degli spazi modello $S^n(1/\sqrt{\kappa})$, R^n, o $H^n(-1/\sqrt{|\kappa|})$.

Questo teorema fondamentale mostra che la curvatura costante determina interamente la geometria locale e globale (a meno di isometrie).

10.8 Forme Normali Locali della Metrica

10.8.1 Coordinate Geodetiche Normali

Dato un punto p su una varietà riemanniana (M, g), possiamo scegliere coordinate speciali in cui la metrica assume una forma particolarmente semplice.

Costruzione: Fissiamo $p \in M$ e consideriamo l'applicazione esponenziale $\exp_p: T_p M \to M$. Se $\{e_i\}$ è una base ortonormale di $T_p M$, definiamo le **coordinate geodetiche normali** $(x^1, ..., x^n)$ in un intorno di p associando al punto:

$$\exp_p(x^i e_i)$$

le coordinate $(x^1, ..., x^n)$.

10.8.2 Proprietà in Coordinate Geodetiche Normali

In queste coordinate:

La metrica è euclidea in p:

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij}$$

1.

I simboli di Christoffel si annullano in p:

$$\Gamma^k_{ij}(p) = 0$$

2.

Le derivate prime della metrica si annullano in p:

$$\partial_k g_{ij}(p) = 0$$

3.

Dimostrazione (schema):

Le geodetiche radiali da p sono espresse come $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$ per $v \in T_p M$. In coordinate normali, se $v = v^i e_i$, la geodetica è:

$$\gamma_v(t) \leftrightarrow (tv^1, tv^2, ..., tv^n)$$

Le equazioni geodetiche sono:

$$d^2x^k/dt^2 + \Gamma^k_{ij}(\gamma(t)) (dx^i/dt)(dx^j/dt) = 0$$

Per la geodetica radiale, $dx^i/dt = v^i$ (costante), quindi:

$$\Gamma^k_{ij}(tv) v^i v^j = 0$$

Questo deve valere per ogni t e ogni v. In particolare, per $t = 0$:

$\Gamma^k_{ij}(p)\, v^i v^j = 0 \quad \forall v$

Questo implica $\Gamma^k_{ij}(p) = 0$ (poiché la forma quadratica è identicamente nulla solo se tutti i coefficienti sono zero).

La condizione $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$ segue dalla costruzione con una base ortonormale.

La condizione $\partial k\, g\{ij\}(p) = 0$ segue dalla formula di Koszul combinata con $\Gamma^k_{ij}(p) = 0$. ∎

10.8.3 Sviluppo di Taylor della Metrica

In coordinate geodetiche normali, possiamo sviluppare la metrica in serie di Taylor attorno a p. Poiché $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$ e $\partial k\, g\{ij\}(p) = 0$, lo sviluppo inizia con i termini del secondo ordine:

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + (1/2)\, \partial_k \partial_l\, g_{ij}(p)\, x^k x^l + O(|x|^3)$$

Usando relazioni tra le derivate seconde della metrica e il tensore di curvatura (derivabili dalla definizione dei simboli di Christoffel e del tensore di Riemann), si ottiene:

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + (1/3)\, R_{ikjl}(p)\, x^k x^l + O(|x|^3)$$

dove abbiamo usato le simmetrie del tensore di Riemann per semplificare.

10.8.4 Significato Geometrico

Questo sviluppo mostra che la **geometria locale di ordine 2** attorno a un punto è interamente determinata dal tensore di curvatura in quel punto. In altre parole, la curvatura in p determina come la metrica si discosta dalla metrica euclidea al secondo ordine in coordinate normali.

10.9 Relazione tra Curvatura e Topologia

10.9.1 Teorema di Gauss-Bonnet (Caso Bidimensionale)

Per superfici compatte bidimensionali senza bordo, esiste una relazione profonda tra curvatura e topologia:

Teorema di Gauss-Bonnet:

$$\int_M K\, dA = 2\pi\chi(M)$$

dove:

- K è la curvatura gaussiana
- dA è l'elemento di area
- $\chi(M)$ è la caratteristica di Eulero

Esempi:

- Sfera S^2: $\chi = 2$, quindi $\int K \, dA = 4\pi$
- Toro T^2: $\chi = 0$, quindi $\int K \, dA = 0$
- Superficie di genere g: $\chi = 2 - 2g$, quindi $\int K \, dA = 2\pi(2 - 2g)$

10.9.2 Generalizzazione: Teorema di Chern-Gauss-Bonnet

In dimensioni pari 2n, esiste una generalizzazione:

$\int_M P_n(\Omega) = \chi(M)$

dove $P_n(\Omega)$ è un polinomio nella forma di curvatura chiamato **forma di Pfaff** o **forma di Chern**.

10.9.3 Indice di Atiyah-Singer

Più in generale, l'**indice di Atiyah-Singer** collega l'analisi (indice di operatori differenziali) con la topologia e la geometria (classi caratteristiche e curvatura).

10.10 Applicazioni e Problemi Aperti

10.10.1 Il Problema di Yamabe

Problema: Data una varietà riemanniana compatta (M, g), esiste una metrica $\tilde{g}$ conformemente equivalente a g (cioè $\tilde{g} = e^{2f} g$ per qualche funzione f) con curvatura scalare costante?

Risposta: Sì! Questo è stato dimostrato da Yamabe, Trudinger, Aubin e Schoen in una serie di lavori culminati negli anni '80.

10.10.2 Congettura di Poincaré (Risoluta)

La congettura di Poincaré è stata risolta da Perelman usando il flusso di Ricci. Le identità di Bianchi giocano un ruolo cruciale nell'analisi dell'evoluzione della curvatura lungo il flusso.

10.10.3 Congettura di Penrose (Aperta)

Congettura di censura cosmica: In relatività generale, sotto ipotesi ragionevoli sulla materia, tutte le singolarità che si formano dal collasso gravitazionale sono "nascoste" dietro orizzonti degli eventi (buchi neri).

Questa congettura rimane aperta e coinvolge profondamente le identità di Bianchi e la struttura causale dello spaziotempo.

Le identità di Bianchi rappresentano vincoli algebrici e differenziali fondamentali sulla curvatura, con conseguenze che si estendono dalla geometria differenziale pura alla fisica teorica. La prima identità esprime una simmetria ciclica intrinseca, mentre la seconda porta alla conservazione del tensore di Einstein e quindi alla conservazione dell'energia-momento

in relatività generale. La decomposizione del tensore di Riemann tramite il tensore di Weyl separa gli aspetti conformi da quelli non conformi della curvatura. Gli spazi di curvatura costante sono interamente classificati. Le coordinate geodetiche normali rivelano come la curvatura determini la geometria locale al secondo ordine. Infine, le profonde connessioni tra curvatura, topologia e analisi (Gauss-Bonnet, Atiyah-Singer) illustrano l'unità della matematica moderna.

Parte VIII - Geometria delle Sottovarietà e Teoria Estrinseca

Capitolo 11: Immersioni e Sottovarietà

Una sottovarietà di una varietà differenziabile M è un sottoinsieme N ⊂ M che ha esso stesso una struttura di varietà differenziabile, compatibile con quella di M. Più precisamente, N è una sottovarietà di dimensione k se per ogni punto p ∈ N esiste una carta locale (U,φ) di M centrata in p tale che:

φ(U ∩ N) = {(x^1,...,x^n) ∈ φ(U) : x^{k+1} = ... = x^n = 0}

In altre parole, localmente N è descritta dall'annullarsi delle ultime n-k coordinate.

Un'immersione è una mappa liscia f: N → M tra varietà tale che il differenziale df_p: T_p N → T_{f(p)} M è iniettivo per ogni p ∈ N. Un'immersione f si dice embedding (immersione propria) se è anche un omeomorfismo sulla sua immagine f(N) ⊂ M dotata della topologia di sottospazio.

Quando M è dotata di una metrica riemanniana g, ogni sottovarietà N eredita naturalmente una metrica indotta, detta metrica riemanniana indotta o prima forma fondamentale. Se f: N → M è un'immersione, la metrica indotta su N è:

g_N = f*g

definita da:

g_N(X,Y) = g(df(X), df(Y))

per campi vettoriali X,Y su N.

La Seconda Forma Fondamentale

Per una sottovarietà N di codimensione k in una varietà riemanniana (M,g), in ogni punto p ∈ N lo spazio tangente T_p M si decompone come somma diretta ortogonale:

T_p M = T_p N ⊕ N_p N

dove N_p N è lo spazio normale a N in p, definito come l'ortogonale di T_p N rispetto a g.

La seconda forma fondamentale è un tensore simmetrico bilineare che misura come N si curva all'interno di M. È definita come:

II: $T_p N \times T_p N \to N_p N$

mediante la formula:

$II(X,Y) = (\bar{\nabla}_X Y)^\perp$

dove $\bar{\nabla}$ è la connessione di Levi-Civita di M, X,Y sono campi vettoriali tangenti a N estesi a campi su M, e $\perp$ denota la proiezione sulla componente normale.

Proposizione: La seconda forma fondamentale è ben definita (non dipende dalle estensioni di X,Y) ed è simmetrica: II(X,Y) = II(Y,X).

Dimostrazione: Per la ben definitezza, dobbiamo verificare che $(\bar{\nabla}_X Y)^\perp$ dipende solo dai valori di X e Y lungo N. Se $\tilde{X}$ è un'altra estensione di X che coincide con X lungo N, allora $(\tilde{X} - X)|_N = 0$. Quindi:

$(\bar{\nabla}_{\tilde{X}} Y)^\perp - (\bar{\nabla}_X Y)^\perp = (\bar{\nabla}_{\tilde{X}-X} Y)^\perp$

Ma $\bar{\nabla}_{\tilde{X}-X} Y$ è tangente a N in ogni punto di N (perché Y è tangente a N e la derivata in una direzione che si annulla su N non produce componenti normali). Quindi la componente normale si annulla.

Per la simmetria, usiamo l'assenza di torsione della connessione di Levi-Civita:

$\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X = [X,Y]$

Proiettando sulla componente normale:

$(\bar{\nabla}_X Y)^\perp - (\bar{\nabla}_Y X)^\perp = [X,Y]^\perp$

Ma [X,Y] è tangente a N (perché N è una sottovarietà e X,Y sono tangenti a N), quindi $[X,Y]^\perp = 0$. Pertanto:

$II(X,Y) = (\bar{\nabla}_X Y)^\perp = (\bar{\nabla}_Y X)^\perp = II(Y,X)$

Relazione tra le Connessioni: La derivata covariante $\bar{\nabla}_X Y$ si decompone come:

$\bar{\nabla}_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^T + (\bar{\nabla}_X Y)^\perp = \nabla_X Y + II(X,Y)$

dove ∇ è la connessione di Levi-Civita della metrica indotta su N. Questa formula è nota come formula di Gauss.

L'Operatore di Forma (Operatore di Weingarten)

Per ogni campo normale ξ a N, definiamo l'operatore di forma (o operatore di Weingarten) come:

$S_\xi: T_p N \to T_p N \quad S_\xi(X) = -(\bar{\nabla}_X \xi)^T$

dove ^T denota la proiezione sulla componente tangente.

Proposizione: L'operatore di forma è autoaggiunto rispetto alla metrica indotta, cioè:

⟨S_ξ(X), Y⟩ = ⟨X, S_ξ(Y)⟩

Dimostrazione: Dobbiamo mostrare che ⟨(∇_X ξ)^T, Y⟩ = ⟨X, (∇¯_Y ξ)^T⟩. Poiché Y è tangente a N e ξ è normale:

0 = X·⟨ξ, Y⟩ = ⟨∇_X ξ, Y⟩ + ⟨ξ, ∇¯_X Y⟩

Il secondo termine si annulla perché ξ è normale e ∇¯_X Y = ∇_X Y + II(X,Y) ha componente tangente ∇_X Y e componente normale II(X,Y), e ⟨ξ, ∇_X Y⟩ = 0. Quindi:

⟨∇_X ξ, Y⟩ = -⟨ξ, II(X,Y)⟩

Analogamente:

⟨X, ∇¯_Y ξ⟩ = -⟨ξ, II(Y,X)⟩ = -⟨ξ, II(X,Y)⟩

(usando la simmetria di II). Quindi ⟨∇_X ξ, Y⟩ = ⟨X, ∇¯_Y ξ⟩, il che implica ⟨(∇_X ξ)^T, Y⟩ = ⟨X, (∇¯_Y ξ)^T⟩. ∎

Relazione tra II e S: La seconda forma fondamentale e l'operatore di forma sono legati dalla formula:

⟨II(X,Y), ξ⟩ = ⟨S_ξ(X), Y⟩

Dimostrazione: Abbiamo già mostrato che:

⟨∇_X ξ, Y⟩ = -⟨ξ, II(X,Y)⟩

Ma ∇¯_X ξ = (∇¯_X ξ)^T + (∇¯_X ξ)^⊥, e Y è tangente, quindi:

⟨(∇_X ξ)^T, Y⟩ = -⟨ξ, II(X,Y)⟩

Per definizione, (∇¯_X ξ)^T = -S_ξ(X), quindi:

⟨-S_ξ(X), Y⟩ = -⟨ξ, II(X,Y)⟩

ovvero:

⟨S_ξ(X), Y⟩ = ⟨II(X,Y), ξ⟩

Curvature Principali e Direzioni Principali

Per una ipersuperficie N in M (codimensione 1), esiste un unico campo normale unitario ξ (a meno del segno). L'operatore di forma S = S_ξ è un operatore autoaggiunto su T_p N, quindi per il teorema spettrale ammette una base ortonormale di autovettori.

Gli autovalori $\kappa_1, ..., \kappa_{n-1}$ di S sono chiamati curvature principali di N in p, e i corrispondenti autovettori sono le direzioni principali.

La curvatura media H è definita come la traccia di S (o la media aritmetica delle curvature principali):

$H = tr(S) = \kappa_1 + ... + \kappa_{n-1}$

La curvatura di Gauss K (per una superficie in R^3) è il determinante di S:

$K = det(S) = \kappa_1 \cdot \kappa_2$

Per una superficie $N \subset R^3$ parametrizzata localmente come r(u,v), le curvature principali sono le soluzioni dell'equazione:

$det(II - \kappa I) = 0$

dove I è la prima forma fondamentale e II è la seconda forma fondamentale vista come matrice.

Esplicitamente, se I ha componenti:

$E = \langle r_u, r_u \rangle, F = \langle r_u, r_v \rangle, G = \langle r_v, r_v \rangle$

e II ha componenti:

$L = \langle r_{uu}, n \rangle, M = \langle r_{uv}, n \rangle, N = \langle r_{vv}, n \rangle$

(dove n è il versore normale), allora:

$\kappa_1, \kappa_2 = [H \pm \sqrt{(H^2 - 4K)}] / 2$

dove:

$H = (EN - 2FM + GL) / (2(EG - F^2))$

$K = (LN - M^2) / (EG - F^2)$

Le Equazioni di Gauss e Codazzi

Le equazioni di Gauss e Codazzi sono relazioni fondamentali che connettono la geometria intrinseca di una sottovarietà (curvatura di Riemann della metrica indotta) con la geometria estrinseca (seconda forma fondamentale).

Teorema (Equazione di Gauss): Sia N una sottovarietà di una varietà riemanniana M. Siano $\bar{R}$ e R i tensori di curvatura di Riemann di M e N rispettivamente. Allora:

$\langle R(X,Y)Z, W \rangle = \langle \bar{R}(X,Y)Z, W \rangle + \langle II(X,Z), II(Y,W) \rangle - \langle II(Y,Z), II(X,W) \rangle$

per campi vettoriali X,Y,Z,W tangenti a N.

Dimostrazione: Usiamo la formula di Gauss $\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X,Y)$. Calcoliamo:

$\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z = \bar{\nabla}_X(\nabla_Y Z + II(Y,Z))$

$= \bar{\nabla}_X \nabla_Y Z + \bar{\nabla}_X II(Y,Z)$

La prima parte si decompone:

$\bar{\nabla}_X \nabla_Y Z = \nabla_X \nabla_Y Z + II(X, \nabla_Y Z)$

Per la seconda parte, II(Y,Z) è un campo normale, quindi:

$\bar{\nabla}_X II(Y,Z) = (\bar{\nabla}_X II(Y,Z))^T + (\bar{\nabla}_X II(Y,Z))^\perp$

La componente tangente è $-S_{II(Y,Z)}(X)$ per definizione dell'operatore di forma. Quindi:

$(\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z)^T = \nabla_X \nabla Y Z - S\{II(Y,Z)\}(X)$

Analogamente:

$(\bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z)^T = \nabla_Y \nabla X Z - S\{II(X,Z)\}(Y)$

Inoltre:

$(\bar{\nabla}_{[X,Y]} Z)^T = \nabla_{[X,Y]} Z$

Quindi:

$\bar{R}(X,Y)Z^T = \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X,Y]} Z$ (componente tangente)

$= \nabla_X \nabla Y Z - \nabla Y \nabla X Z - \nabla [X,Y] Z - S\{II(Y,Z)\}(X) + S\{II(X,Z)\}(Y)$

$= R(X,Y)Z - S_{II(Y,Z)}(X) + S_{II(X,Z)}(Y)$

Prendendo il prodotto scalare con W:

$\langle \bar{R}(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(X,Y)Z, W\rangle - \langle S_{II(Y,Z)}(X), W\rangle + \langle S_{II(X,Z)}(Y), W\rangle$

Usando la relazione $\langle S_\xi(X), W\rangle = \langle II(X,W), \xi\rangle$:

$= \langle R(X,Y)Z, W\rangle - \langle II(X,W), II(Y,Z)\rangle + \langle II(Y,W), II(X,Z)\rangle$

Riorganizzando:

$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle \bar{R}(X,Y)Z, W\rangle + \langle II(X,Z), II(Y,W)\rangle - \langle II(Y,Z), II(X,W)\rangle$

Teorema (Equazione di Codazzi): Nelle stesse ipotesi:

$(\bar{R}(X,Y)Z)^\perp = (\nabla_X II)(Y,Z) - (\nabla_Y II)(X,Z)$

dove ∇II è la derivata covariante della seconda forma fondamentale, definita come:

$(\nabla_X \mathrm{II})(Y,Z) = \nabla^\perp_X(\mathrm{II}(Y,Z)) - \mathrm{II}(\nabla_X Y, Z) - \mathrm{II}(Y, \nabla_X Z)$

e $\nabla^\perp$ denota la connessione normale (derivata covariante nella direzione normale).

Dimostrazione: Calcoliamo la componente normale di $\bar{R}(X,Y)Z$:

$(\bar{R}(X,Y)Z)^\perp = (\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X,Y]} Z)^\perp$

Usando $\bar{\nabla}_Y Z = \nabla_Y Z + \mathrm{II}(Y,Z)$:

$\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z = \bar{\nabla}_X \nabla_Y Z + \bar{\nabla}_X \mathrm{II}(Y,Z)$

La componente normale di $\bar{\nabla}_X \nabla_Y Z$ è $\mathrm{II}(X, \nabla_Y Z)$. La componente normale di $\bar{\nabla}_X \mathrm{II}(Y,Z)$ è la derivata covariante normale. Continuando i calcoli e usando la simmetria appropriata, si ottiene l'equazione di Codazzi. ∎

Per una ipersuperficie in uno spazio di curvatura costante (come $\mathbb{R}^n$), l'equazione di Gauss si semplifica notevolmente. Per $N \subset \mathbb{R}^n$:

$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle \mathrm{II}(X,Z), \mathrm{II}(Y,W)\rangle - \langle \mathrm{II}(Y,Z), \mathrm{II}(X,W)\rangle$

perché $\bar{R} = 0$ in $\mathbb{R}^n$.

Per una superficie in $\mathbb{R}^3$, scegliendo una base ortonormale $\{e_1, e_2\}$ di direzioni principali:

$\mathrm{II}(e_i, e_j) = \kappa_i \delta_{ij} n$

dove n è il versore normale. L'equazione di Gauss diventa:

$\langle R(e_1,e_2)e_2, e_1\rangle = \kappa_1 \kappa_2$

Ma il membro sinistro è la curvatura sezionale (che per una superficie coincide con la curvatura di Gauss K), quindi:

$K = \kappa_1 \kappa_2$

Questo riprova il teorema egregium: la curvatura di Gauss, pur essendo definita in termini estrinseci (prodotto delle curvature principali), è in realtà una quantità intrinseca (curvatura sezionale della metrica indotta).

Superfici Minime

Una superficie N in una varietà riemanniana M si dice minimale se la curvatura media si annulla identicamente: $H = 0$.

Teorema: Una superficie è minimale se e solo se è un punto critico del funzionale area per variazioni a volume costante.

Dimostrazione (Schema): Consideriamo il funzionale area:

$A(N) = \int_N dA$

dove dA è l'elemento di area della metrica indotta. Per una variazione N_t di N con campo variazionale normale ξ, la variazione prima dell'area è:

dA/dt|_{t=0} = -∫_N H ⟨ξ, n⟩ dA

dove H è la curvatura media. Quindi le superfici minimali sono esattamente i punti critici del funzionale area. ∎

Esempi classici di superfici minime in $\mathbb{R}^3$:

1. Il piano (H = 0 banalmente)
2. Il catenoide: superficie di rivoluzione della catenaria
3. L'elicoide: superficie rigata generata da una retta che ruota attorno a un asse mentre trasla

Teorema (Bernstein, 1915): L'unico grafico di una funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che sia una superficie minimale in $\mathbb{R}^3$ è un piano.

Questo risultato notevole fu generalizzato da De Giorgi, Fleming, Almgren e Simons, che dimostrarono che in R^n, per $n \leq 7$, ogni ipersuperficie minimale completa che sia un grafico è necessariamente un iperpiano. Per $n \geq 8$, Bombieri, De Giorgi e Giusti costruirono controesempi.

Parte IX - Analisi Armonica su Varietà e Teoria degli Operatori

Capitolo 12: Funzioni Armoniche e il Problema di Dirichlet

Una funzione $f: M \to \mathbb{R}$ su una varietà riemanniana (M,g) si dice armonica se soddisfa l'equazione di Laplace:

$\Delta f = 0$

Le funzioni armoniche sono punti critici del funzionale energia di Dirichlet:

E(f) = (1/2) ∫_M |∇f|² dV = (1/2) ∫_M g^{ij} (∂f/∂x^i)(∂f/∂x^j) dV

Proposizione: Una funzione f è armonica se e solo se è un punto critico del funzionale di Dirichlet tra tutte le funzioni con valori al bordo fissati.

Dimostrazione: Consideriamo una variazione f_t = f + tη dove η è una funzione liscia con η|_{∂M} = 0 (variazione a bordo fisso). La derivata del funzionale è:

dE/dt|_{t=0} = ∫_M g^{ij} (∂f/∂x^i)(∂η/∂x^j) dV

Integrando per parti (usando il teorema della divergenza):

= -∫*M η · g^{ij} ∂/∂x^j(∂f/∂x^i) dV* + ∫{∂M} η · g^{ij}(∂f/∂x^i) n_j dS

Il termine al bordo si annulla perché η|_{∂M} = 0. L'integrale di volume è:

= -∫_M η · Δf dV

dove abbiamo usato la formula del laplaciano:

Δf = (1/√g) ∂/∂x^j(√g g^{ij} ∂f/∂x^i)

Per la condizione di criticità, dE/dt|_{t=0} = 0 per ogni η, quindi:

∫_M η · Δf dV = 0 ∀ η

Questo implica Δf = 0. ∎

Teorema (Principio del Massimo): Sia M una varietà riemanniana compatta connessa. Se f: M → R è armonica, allora f è costante se e solo se raggiunge il suo massimo o minimo in un punto interno.

Dimostrazione: Supponiamo che f raggiunga un massimo in un punto interno p ∈ M. In un intorno di p, possiamo scegliere coordinate normali geodetiche. In queste coordinate, in p si ha:

g^{ij} = δ^{ij} + O(|x|²)

e la condizione di massimo implica che la matrice hessiana (∂²f/∂x^i∂x^j) sia semidefinita negativa. In particolare, la traccia:

∑_i ∂²f/∂(x^i)² ≤ 0

Ma in coordinate normali in p:

Δf|_p = ∑_i ∂²f/∂(x^i)² + termini di ordine inferiore

Poiché i termini di primo ordine si annullano in un punto critico e Δf = 0, otteniamo:

∑_i ∂²f/∂(x^i)² = 0

Combinando con la semidefinitezza negativa, tutte le derivate seconde devono annullarsi, quindi f è costante in un intorno di p. Per connessione e analiticità delle funzioni armoniche, f è costante su tutta M. ∎

Corollario (Principio del Massimo Forte): Su una varietà compatta, una funzione armonica non può avere massimi o minimi interni a meno che non sia costante.

Il Problema di Dirichlet

Il problema di Dirichlet consiste nel trovare una funzione armonica su un dominio Ω ⊂ M con valori al bordo prescritti:

{Δf = 0 in Ω {f = φ su ∂Ω

dove $\varphi: \partial\Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione data.

Teorema (Esistenza e Unicità per il Problema di Dirichlet): Sia Ω un dominio limitato regolare in una varietà riemanniana M, e sia $\varphi \in C(\partial\Omega)$. Allora esiste un'unica funzione $f \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ che risolve il problema di Dirichlet.

Dimostrazione (Metodo Variazionale): L'unicità segue dal principio del massimo. Se f_1 e f_2 sono due soluzioni, la differenza $u = f_1 - f_2$ è armonica in Ω e si annulla su $\partial\Omega$. Per il principio del massimo, $u \equiv 0$, quindi $f_1 = f_2$.

Per l'esistenza, consideriamo lo spazio di Sobolev:

$$H^1_\varphi(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega) : f|_{\partial\Omega} = \varphi\}$$

dove $H^1(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni con derivate prime in L^2. Il funzionale di Dirichlet:

$$E(f) = \int_\Omega |\nabla f|^2 \, dV$$

è convesso, coercivo e semicontinuo inferiormente su $H^1_\varphi(\Omega)$. Per il metodo diretto del calcolo delle variazioni, E ammette un minimizzatore $f \in H^1_\varphi(\Omega)$.

La condizione di Eulero-Lagrange per il minimizzatore è:

$$\int_\Omega \langle \nabla f, \nabla \eta \rangle \, dV = 0 \quad \forall \eta \in H^1_0(\Omega)$$

Integrando per parti:

$$\int_\Omega \eta \, \Delta f \, dV = 0 \quad \forall \eta \in C^\infty_0(\Omega)$$

Questo implica $\Delta f = 0$ in senso debole. Per regolarità ellittica, $f \in C^\infty(\Omega)$, quindi è una soluzione classica. ∎

Funzioni di Green e Nucleo di Poisson

Per un dominio $\Omega \subset M$, la funzione di Green G(x,y) è la soluzione fondamentale del laplaciano con condizioni al bordo di Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta_x G(x,y) = \delta_y(x) \text{ in } \Omega \\ G(x,y) = 0 \text{ per } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

dove δ_y è la delta di Dirac centrata in y.

La funzione di Green fornisce una rappresentazione integrale per la soluzione del problema di Dirichlet:

$$f(x) = -\int_\Omega G(x,y)\, \Delta f(y)\, dV(y) + \int_{\partial\Omega} \varphi(y)\, \partial G/\partial n_y(x,y)\, dS(y)$$

dove $\partial/\partial n$ denota la derivata normale esteriore.

Per $\Omega = B_R(p)$ (palla geodetica di raggio R centrata in p) in $\mathbb{R}^n$, in coordinate normali centrate in p, la funzione di Green ha una forma esplicita. Per n = 2:

$G(x,y) = (1/2\pi) \ln(R/|x-y|) + \text{termine regolare}$

Per $n \geq 3$:

$G(x,y) = 1/((n-2)\omega_n) [1/|x-y|^{n-2} - 1/(R^2-\langle x,y\rangle)^{(n-2)/2}] + \text{termine regolare}$

Il nucleo di Poisson $P(x,y)$ per $x \in \partial\Omega$ è definito come:

$P(x,y) = -\partial G/\partial n_x(x,y)$

La soluzione del problema di Dirichlet può essere scritta come:

$f(x) = \int_{\partial\Omega} \varphi(y) P(x,y) dS(y)$

Autovalori del Laplaciano con Condizioni al Bordo

Il problema agli autovalori per il laplaciano con condizioni di Dirichlet è:

$\{\Delta\varphi = -\lambda\varphi \text{ in } \Omega \{\varphi = 0 \text{ su } \partial\Omega$

Teorema (Spettro del Laplaciano di Dirichlet): Sia Ω un dominio limitato regolare. Allora esistono infiniti autovalori:

$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ... \to \infty$

con corrispondenti autofunzioni $\{\varphi_n\}$ che formano una base ortonormale di $L^2(\Omega)$.

Il primo autovalore λ_1 è semplice (molteplicità 1) e la corrispondente autofunzione φ_1 non cambia segno.

Dimostrazione: Gli autovalori sono caratterizzati dal principio variazionale di Rayleigh-Ritz:

$\lambda_n = \inf_{V_n} \max_{f\in V_n, f\neq 0} (\int_\Omega |\nabla f|^2 dV)/(\int_\Omega f^2 dV)$

dove l'infimo è preso su tutti i sottospazi n-dimensionali $V_n \subset H^1_0(\Omega)$.

Per λ_1, abbiamo semplicemente:

$\lambda_1 = \inf_{f\in H^1_0(\Omega), f\neq 0} (\int_\Omega |\nabla f|^2 dV)/(\int_\Omega f^2 dV)$

Questo infimo è raggiunto da una funzione φ_1, che soddisfa l'equazione di Eulero-Lagrange:

$\Delta\varphi_1 = -\lambda_1 \varphi_1$

Per il principio del massimo forte applicato a $|\varphi_1|$, l'autofunzione non si annulla all'interno di Ω. Cambiando segno se necessario, possiamo assumere $\varphi_1 > 0$ in Ω.

Per la semplicità di λ_1, supponiamo che esistano due autofunzioni linearmente indipendenti φ, ψ per λ_1. Allora qualunque combinazione lineare $a\varphi + b\psi$ è un'autofunzione. Scegliamo a,b tali che $a\varphi + b\psi$ cambi segno in Ω (questo è sempre possibile se φ e ψ sono linearmente

indipendenti e non proporzionali). Ma questo contraddice il fatto che le autofunzioni per λ_1 non cambiano segno. ∎

Disuguaglianze Isoperimetriche

Le disuguaglianze isoperimetriche collegano quantità geometriche come volume e area del bordo con quantità spettrali.

Teorema (Disuguaglianza di Faber-Krahn): Sia Ω un dominio in R^n con volume V e primo autovalore λ_1. Allora:

λ_1 ≥ λ_1(B) · (V_B/V)^{2/n}

dove B è la palla di volume V_B = V e λ_1(B) è il primo autovalore della palla.

L'uguaglianza vale se e solo se Ω è una palla.

Dimostrazione (Schema): La dimostrazione usa la simmetrizzazione di Schwarz, che trasforma un dominio arbitrario in una palla preservando il volume ma diminuendo il primo autovalore (o lasciandolo invariato se il dominio è già una palla). ∎

Per la palla B_R ⊂ R^n, il primo autovalore è:

λ_1(B_R) = (j_{n/2-1,1}/R)²

dove j_{v,1} è il primo zero della funzione di Bessel J_v. Per n = 2:

λ_1(B_R) ≈ 5,783/R²

Per n = 3:

λ_1(B_R) = π²/R²

Il Teorema di Hodge per Forme Differenziali

Il teorema di Hodge generalizza la teoria armonica dalle funzioni alle forme differenziali. Una k-forma ω su una varietà riemanniana compatta orientata M si dice armonica se:

Δω = 0

dove Δ = dδ + δd è il laplaciano di Hodge, con δ = ±*d* l'operatore di codiferenziazione (* è l'operatore di Hodge).

Teorema di Hodge: Su una varietà riemanniana compatta orientata M, ogni classe di coomologia [ω] ∈ H^k_{dR}(M) (k-esima coomologia de Rham) contiene un'unica forma armonica. Inoltre:

H^k_{dR}(M) ≅ {ω ∈ Ω^k(M) : Δω = 0}

dove Ω^k(M) denota lo spazio delle k-forme lisce.

Dimostrazione (Schema): La dimostrazione si basa sulla decomposizione di Hodge:

$\Omega^k(M) = d(\Omega^{k-1}(M)) \oplus \delta(\Omega^{k+1}(M)) \oplus Harm^k(M)$

dove $Harm^k(M) = \{\omega : \Delta\omega = 0\}$ è lo spazio delle forme armoniche.

Se ω è armonica, allora $d\omega = 0$ (perché $0 = \langle \Delta\omega, \omega \rangle = \langle d\delta\omega, \omega \rangle + \langle \delta d\omega, \omega \rangle = |\delta\omega|^2 + |d\omega|^2$, quindi $d\omega = 0$). Similmente $\delta\omega = 0$. Quindi le forme armoniche sono chiuse.

Se ω_1, ω_2 sono forme armoniche nella stessa classe di coomologia, allora $\omega_1 - \omega_2 = d\eta$ per qualche $(k-1)$-forma η. Ma allora:

$0 = \langle \Delta\omega_1 - \Delta\omega_2, \omega_1 - \omega_2 \rangle = \langle \Delta d\eta, d\eta \rangle = |d\eta|^2 + |\delta d\eta|^2$

Quindi $d\eta = 0$, cioè $\omega_1 = \omega_2$. ∎

Corollario: I numeri di Betti $b_k(M) = \dim H^k_{dR}(M)$ sono finiti per varietà compatte, e:

$b_k(M) = \dim Harm^k(M)$

L'Operatore di Hodge e Dualità

L'operatore di Hodge $*$ è un isomorfismo lineare:

$*: \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$

definito dalla condizione:

$\omega \wedge *\eta = \langle \omega, \eta \rangle \, dV$

per ogni coppia di k-forme ω, η, dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è il prodotto scalare indotto dalla metrica.

In coordinate locali, se $\omega = \omega_{i_1 \ldots i_k} \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, allora:

$(*\omega)_{j_1 \ldots j_{n-k}} = \frac{1}{k!} \sqrt{g} \, \varepsilon_{i_1 \ldots i_k \, j_1 \ldots j_{n-k}} \, g^{i_1 l_1} \ldots g^{i_k l_k} \, \omega_{l_1 \ldots l_k}$

dove ε è il simbolo di Levi-Civita interamente antisimmetrico.

Proposizione: L'operatore di Hodge soddisfa:

$**\omega = (-1)^{k(n-k)} \omega$

per k-forme ω su una varietà orientata n-dimensionale.

Dimostrazione: Applicando due volte la definizione:

$\omega \wedge **\eta = \langle \omega, *\eta \rangle \, dV$

Ma anche:

$*\eta \wedge *\omega = \langle *\eta, *\omega \rangle \, dV = \langle \eta, \omega \rangle \, dV = \langle \omega, \eta \rangle \, dV$

Quindi:

$\omega \wedge **\eta = *\eta \wedge *\omega$

Per il wedge prodotto:

$*\eta \wedge *\omega = (-1)^{(n-k)k} *\omega \wedge *\eta$

Questo implica $\omega \wedge **\eta = (-1)^{k(n-k)} \omega \wedge *\eta$, da cui $**\omega = (-1)^{k(n-k)} \omega$. ∎

La dualità di Poincaré afferma che:

$H^k_{dR}(M) \cong H^{n-k}_{dR}(M)$

per varietà compatte orientate n-dimensionali. L'isomorfismo è dato dall'operatore di Hodge applicato alle forme armoniche.

Stime del Calore e Comportamento Asintotico

L'equazione del calore su una varietà:

$\partial u/\partial t = \Delta u$

ha proprietà di regolarizzazione: anche se il dato iniziale $u(x,0)$ è solo in L^2, la soluzione $u(x,t)$ è liscia per $t > 0$.

Teorema (Stime Gaussiane del Nucleo del Calore): Su una varietà riemanniana completa M con curvatura di Ricci limitata inferiormente ($Ric \geq -\kappa$), il nucleo del calore $K(x,y,t)$ soddisfa:

$$C_1/V(x,\sqrt{t}) \exp(-d^2(x,y)/4t - C_2t) \leq K(x,y,t) \leq C_3/V(x,\sqrt{t}) \exp(-d^2(x,y)/5t + C_4t)$$

dove $V(x,r)$ è il volume della palla geodetica di raggio r centrata in x, $d(x,y)$ è la distanza geodetica, e le costanti C_i dipendono da κ.

Queste stime sono fondamentali per lo studio della geometria tramite metodi analitici. Ad esempio, permettono di dimostrare che varietà con crescita polinomiale del volume hanno crescita sublineare del gruppo fondamentale.

Parte X - Teoremi di Comparazione e Geometria Globale

Capitolo 13: Teoremi di Comparazione di Rauch e Toponogov

I teoremi di comparazione sono strumenti fondamentali della geometria riemanniana che permettono di dedurre proprietà globali di una varietà da limitazioni sulla curvatura. L'idea centrale è confrontare una varietà data con spazi modello di curvatura costante.

Il primo risultato di questo tipo è il teorema di comparazione di Rauch per la crescita dei campi di Jacobi.

Teorema di Rauch: Sia $\gamma: [0,L] \to M$ una geodetica su una varietà riemanniana M, e sia J un campo di Jacobi lungo γ ortogonale a γ' con $J(0) = 0$. Sia $\tilde{J}$ un campo di Jacobi lungo una geodetica in uno spazio modello $\tilde{M}_\kappa$ di curvatura costante κ, con le stesse condizioni iniziali $\tilde{J}(0) = 0$ e $|\tilde{J}'(0)| = |J'(0)|$.

Se la curvatura sezionale K_M di tutti i piani contenenti γ' soddisfa $K_M \leq \kappa$, allora:

$|J(t)| \geq |\tilde{J}(t)| \ \forall t \in [0,L]$

Se invece $K_M \geq \kappa$, allora:

$|J(t)| \leq |\tilde{J}(t)| \ \forall t \in [0,L]$

(assumendo che $\tilde{J}$ non abbia zeri in $(0,L]$).

Dimostrazione (Schema): La dimostrazione si basa sull'equazione di Jacobi. Scriviamo $J = f(t)E(t)$ dove $E(t)$ è un campo vettoriale parallelo ortogonale a γ' con $|E| = 1$, e $f(t) = |J(t)|$. L'equazione di Jacobi diventa:

$f''(t) + K(\gamma'(t), J(t)) f(t) = 0$

dove K denota la curvatura sezionale del piano generato da γ' e J.

Nello spazio modello $\tilde{M}_\kappa$, l'equazione corrispondente è:

$\tilde{f}''(t) + \kappa \tilde{f}(t) = 0$

con le stesse condizioni iniziali $f(0) = \tilde{f}(0) = 0$ e $f'(0) = \tilde{f}'(0) = |J'(0)|$.

Se $K \leq \kappa$, la funzione $u = f - \tilde{f}$ soddisfa:

$u''(t) + \kappa u(t) \leq 0$

con $u(0) = 0$ e $u'(0) = 0$. Un argomento di principio del massimo mostra che $u(t) \geq 0$, quindi $f(t) \geq \tilde{f}(t)$.

I dettagli tecnici richiedono attenzione alle singolarità quando $\tilde{f}$ si annulla (punti coniugati nello spazio modello). ∎

Conseguenze del Teorema di Rauch:

1. Se $K_M \leq 0$, le geodetiche si allontanano più rapidamente che nello spazio euclideo.

2. Se $K_M \geq \kappa > 0$, le geodetiche convergono più rapidamente che sulla sfera $S^n(1/\sqrt{\kappa})$.

Il teorema di Toponogov è una versione globale e più geometrica del confronto della curvatura.

Teorema di Toponogov (Triangoli): Sia M una varietà riemanniana completa con curvatura sezionale K ≥ κ. Sia ABC un triangolo geodetico in M (cioè, tre punti collegati da geodetiche minimizzanti). Sia $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ un triangolo di comparazione nello spazio modello $\tilde{M}_\kappa$ con gli stessi lati: $|AB| = |\bar{A}\bar{B}|$, $|BC| = |\bar{B}\bar{C}|$, $|CA| = |\bar{C}\bar{A}|$.

Allora per ogni punto P sul lato BC, esiste un punto $\bar{P}$ su $\bar{B}\bar{C}$ tale che $|BP| = |\bar{B}\bar{P}|$ e:

$|AP| \leq |\bar{A}\bar{P}|$

In altre parole, i triangoli in M sono "più sottili" che nello spazio modello.

Dimostrazione (Idea): La dimostrazione usa un argomento di variazione delle geodetiche e il teorema di Rauch. Si considera una famiglia di geodetiche da A a punti su BC, e si studia come varia la loro lunghezza. La condizione K ≥ κ implica che queste geodetiche convergono più rapidamente che nello spazio modello, rendendo i triangoli più sottili. ∎

Conseguenze:

Corollario (Disuguaglianza degli Angoli): Con le notazioni del teorema, se α, β, γ denotano gli angoli del triangolo ABC e $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ quelli del triangolo di comparazione, allora:

$\alpha + \beta + \gamma \geq \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma}$

Per κ = 0 (spazio euclideo), $\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} = \pi$, quindi:

$\alpha + \beta + \gamma \geq \pi$

Questo generalizza il fatto che su una superficie di curvatura positiva, la somma degli angoli di un triangolo geodetico supera π.

Teorema di Bonnet-Myers

Un'applicazione spettacolare dei teoremi di comparazione è il teorema di Bonnet-Myers, che deduce la compattezza da limitazioni sulla curvatura di Ricci.

Teorema di Bonnet-Myers: Sia M una varietà riemanniana completa con curvatura di Ricci limitata inferiormente:

$Ric(v,v) \geq (n-1)\kappa\, |v|^2 \quad \forall\, v \in TM$

dove κ > 0. Allora:

1. M è compatta
2. Il diametro di M soddisfa $diam(M) \leq \pi/\sqrt{\kappa}$
3. Il gruppo fondamentale $\pi_1(M)$ è finito

Dimostrazione: Fissiamo $p \in M$ e consideriamo una geodetica $\gamma: [0,L] \to M$ con $\gamma(0) = p$ parametrizzata a velocità unitaria. Sia $\{E_i(t)\}_{i=1}^{n-1}$ un riferimento ortonormale di vettori ortogonali a $\gamma'(t)$, paralleli lungo γ.

Consideriamo i campi di Jacobi $J_i(t) = f(t)E_i(t)$ dove $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$. L'equazione di Jacobi per J_i è:

$f''(t) + K(\gamma', E_i) f(t) = 0$

Sommando su $i = 1, ..., n-1$:

$\sum_i [f''(t) + K(\gamma', E_i) f(t)] = (n-1)f''(t) + f(t) \sum_i K(\gamma', E_i) = 0$

Ma:

$\sum_i K(\gamma', E_i) = \sum_i \langle R(\gamma', E_i)E_i, \gamma' \rangle = Ric(\gamma', \gamma')$

Per ipotesi, $Ric(\gamma', \gamma') \geq (n-1)\kappa$. Quindi:

$(n-1)f''(t) + (n-1)\kappa f(t) \leq 0$

ovvero:

$f''(t) + \kappa f(t) \leq 0$

Nello spazio modello di curvatura κ, l'equazione esatta è:

$\tilde{f}''(t) + \kappa \tilde{f}(t) = 0$

con soluzione $\tilde{f}(t) = (1/\sqrt{\kappa}) \sin(\sqrt{\kappa}\, t)$ (con $\tilde{f}(0) = 0$, $\tilde{f}'(0) = 1$).

Per confronto (principio del massimo per ODE), $f(t) \leq \tilde{f}(t)$. In particolare, $\tilde{f}$ si annulla per la prima volta in $t = \pi/\sqrt{\kappa}$, quindi f deve annullarsi prima o al tempo $\pi/\sqrt{\kappa}$.

Questo significa che esiste un punto coniugato a p lungo γ a distanza al massimo $\pi/\sqrt{\kappa}$. Per il teorema di Hopf-Rinow, ogni punto $q \in M$ è connesso a p da una geodetica minimizzante γ. Se $d(p,q) > \pi/\sqrt{\kappa}$, ci sarebbe un punto coniugato tra p e q, contraddicendo la minimalità di γ.

Quindi $d(p,q) \leq \pi/\sqrt{\kappa}$ per ogni q, cioè $diam(M) \leq \pi/\sqrt{\kappa}$.

Per compattezza, la palla chiusa $\bar{B}_{\pi/\sqrt{\kappa}}(p) = M$ (perché contiene tutti i punti), ed è compatta per il teorema di Hopf-Rinow.

Per il gruppo fondamentale, sia γ un cappio basato in p di lunghezza $L > \pi/\sqrt{\kappa}$. La geodetica che realizza la distanza da p al punto medio di γ ha lunghezza $\leq \pi/(2\sqrt{\kappa}) < L/2$. Questo permette di "accorciare" il cappio, mostrando che γ è omotopicamente banale. Quindi $\pi_1(M)$ è generato da cappi di lunghezza $\leq \pi/\sqrt{\kappa}$, che formano un insieme compatto. Con un argomento più sofisticato si mostra la finitezza. ∎

Conseguenze:

1. La sfera S^n ha curvatura sezionale $\equiv 1$, quindi $Ric = (n-1)g$. Il teorema dà $diam(S^n) \leq \pi$, che è esatto.

2. Se una varietà completa ha Ric ≥ 0 e un punto con Ric > 0, allora alcune geodetiche hanno punti coniugati, ma la varietà può essere non compatta (esempio: R^n).

3. Non esiste una metrica riemanniana completa su R^n con Ric ≥ ε > 0 ovunque.

Teorema di Cheng

Un altro risultato importante nella teoria della comparazione è il teorema di Cheng sul diametro.

Teorema di Cheng: Sia M una varietà riemanniana completa n-dimensionale con Ric ≥ (n-1)κ per κ > 0. Se diam(M) = π/√κ (il valore massimo permesso da Bonnet-Myers), allora M è isometrica alla sfera S^n(1/√κ).

Dimostrazione (Idea): Se il diametro è massimale, esistono punti p,q con d(p,q) = π/√κ. Si può mostrare che ogni geodetica minimizzante da p a q ha un campo di Jacobi che raggiunge esattamente il comportamento dello spazio modello. Questo implica che la curvatura sezionale è costante lungo certe direzioni, e con un argomento di continuità, ovunque. ∎

Crescita del Volume e Curvatura

La curvatura influenza profondamente la crescita del volume delle palle geodetiche.

Teorema (Bishop-Gromov): Sia M una varietà riemanniana completa con Ric ≥ (n-1)κ. Sia V(r) = Vol(B_r(p)) il volume della palla geodetica di raggio r centrata in p, e sia $\tilde{V}(r)$ il volume della palla di raggio r nello spazio modello $\tilde{M}_\kappa$. Allora la funzione:

$r \mapsto V(r)/\tilde{V}(r)$

è non crescente.

In particolare, per ogni $0 < r < R$:

$V(R)/V(r) \leq \tilde{V}(R)/\tilde{V}(r)$

Dimostrazione (Schema): La dimostrazione usa la formula dell'area per calcolare la derivata di V(r):

$dV/dr = \int_{S_r(p)} J(v)\, d\sigma$

dove S_r(p) è la sfera geodetica di raggio r, J(v) è lo jacobiano dell'applicazione esponenziale nella direzione v, e dσ è la misura sulla sfera unitaria di T_p M.

L'equazione di Jacobi con la condizione Ric ≥ (n-1)κ implica che J(v) cresce al massimo come lo jacobiano nello spazio modello. Il confronto accurato delle derivate logaritmiche porta al risultato. ∎

Conseguenze:

1. Se Ric ≥ 0, allora V(r) cresce al massimo come r^n (crescita euclidea).
2. Se Ric ≥ κ > 0, allora V(r) è limitato (coerente con la compattezza).
3. Se Ric ≥ -κ < 0, allora V(r) cresce al massimo esponenzialmente: V(r) ≤ C e^{√κ r}.

Teorema della Splitting

Il teorema della splitting di Cheeger-Gromoll descrive la struttura delle varietà con curvatura di Ricci non negativa che contengono una linea (geodetica isometrica a R).

Teorema di Cheeger-Gromoll: Sia M una varietà riemanniana completa con Ric ≥ 0. Se M contiene una linea γ: R → M (cioè d(γ(s), γ(t)) = |s-t| per ogni s,t), allora M è isometrica a un prodotto riemanniano N × R per qualche varietà (N,h) con Ric_h ≥ 0.

Dimostrazione (Idea): Dato un punto p = γ(0), si costruisce la funzione distanza da p:

f(x) = d(x,p)

Questa funzione è localmente convessa (nel senso che la sua hessiana è semidefinita positiva) per la condizione Ric ≥ 0. L'insieme:

N = {x ∈ M : f(x) = d(x, γ(R)) = 0}

è la "sezione trasversa" alla linea. Si mostra che M ≅ N × R mediante la mappa:

Φ: N × R → M Φ(x, t) = exp_x(t·v(x))

dove v(x) è il vettore tangente unitario nella direzione di γ che minimizza la distanza da x a γ.

La condizione Ric ≥ 0 garantisce che Φ sia un'isometria globale. ∎

Corollario: Se M è una varietà completa con Ric > 0 (strettamente positivo ovunque), allora M non contiene linee.

Teorema di Gromoll-Meyer

Un risultato correlato riguarda gli spazi con curvatura sezionale non negativa.

Teorema di Gromoll-Meyer: Sia M una varietà riemanniana completa aperta (non compatta) con curvatura sezionale K ≥ 0. Allora M è diffeomorfa a R^n.

Questo risultato sorprendente afferma che le uniche varietà complete aperte con curvatura non negativa sono topologicamente R^n. La metrica, tuttavia, può essere molto diversa da quella euclidea.

Rigidità delle Varietà con Curvatura Limitata

I teoremi di rigidità affermano che certe condizioni sulla curvatura forzano la varietà a essere isometrica a uno spazio modello.

Teorema (Rigidità della Sfera): Sia M una varietà riemanniana completa semplicemente connessa di dimensione n con:

$\delta \leq K \leq 1$

dove $\delta > 1/4$ (per $n \geq 3$) o $\delta > 0{,}74$ (per $n = 2$). Allora M è omeomorfa a S^n.

Teorema (Rigidità di Cheng): Se M è completa con $Ric \geq (n-1)$ e ammette una funzione propria $f: M \to R$ con $|\nabla f| \leq 1$, allora M è isometrica a $[0, diam(M)] \times N$ per qualche varietà N con $Ric_N \geq (n-2)$.

Applicazioni alla Geodesia Fisica

I teoremi di comparazione hanno applicazioni concrete nella geodesia. La Terra, modellata come superficie di rivoluzione, ha curvatura gaussiana K che varia con la latitudine. All'equatore, $K \approx 1{,}6 \times 10^{-14}\ m^{-2}$ (molto vicina a zero ma positiva).

Il teorema di Gauss-Bonnet implica che l'integrale della curvatura su una regione geodetica chiusa è legato alla sua topologia. Per una regione semplicemente connessa Ω sulla superficie terrestre:

$\int_\Omega K\, dA + \int_{\partial\Omega} \kappa_g\, ds = 2\pi$

dove κ_g è la curvatura geodetica del bordo. Questa formula permette di calcolare l'area di grandi regioni terrestri a partire da misure di curvatura.

Per distanze geodetiche sulla Terra, il teorema di Toponogov fornisce stime. Se consideriamo un triangolo geodetico grande (ad esempio, tra tre continenti), gli angoli soddisfano:

$\alpha + \beta + \gamma > \pi$

con l'eccesso angolare:

$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi = \int_T K\, dA$

dove T è l'interno del triangolo. Questo permette misurazioni indirette della curvatura terrestre.

Capitolo 14: Geometria Simplettica e Meccanica Hamiltoniana

14.1 Introduzione alle Varietà Simplettiche

14.1.1 Definizione e Struttura Fondamentale

Una varietà simplettica è una coppia (M, ω) dove M è una varietà differenziabile di dimensione pari 2n e ω è una 2-forma differenziale che soddisfa due proprietà fondamentali:

Proprietà 1 (Chiusura): dω = 0

La forma ω è chiusa, cioè il suo differenziale esterno si annulla identicamente.

Proprietà 2 (Non degenerazione): Per ogni punto p ∈ M e ogni vettore tangente v ∈ T_p M non nullo, esiste un vettore w ∈ T_p M tale che:

ω_p(v, w) ≠ 0

Equivalentemente, la mappa lineare:

ω^ ♭ : T_p M → T*_p M

definita da ω^ ♭ (v)(w) = ω(v, w) è un isomorfismo.

La forma ω è detta forma simplettica. La condizione di chiusura implica che localmente ω è esatta (per il lemma di Poincaré), mentre la non degenerazione garantisce che ω definisca una struttura geometrica ricca.

14.1.2 Il Teorema di Darboux

Il risultato fondamentale che caratterizza la struttura locale delle varietà simplettiche è il teorema di Darboux, che afferma l'esistenza di coordinate canoniche.

Teorema di Darboux: Sia (M, ω) una varietà simplettica di dimensione 2n. Per ogni punto p ∈ M esistono coordinate locali (q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n) in un intorno U di p tali che:

ω = dq^1 ∧ dp_1 + dq^2 ∧ dp_2 + ... + dq^n ∧ dp_n

= ∑_{i=1}^n dq^i ∧ dp_i

Queste coordinate sono dette coordinate canoniche o coordinate di Darboux.

Dimostrazione (Schema):

La dimostrazione procede per induzione sulla dimensione. Per n = 1, si tratta di una 2-forma non degenere su una superficie, e il risultato segue da considerazioni locali.

Per il passo induttivo, fissiamo un punto p ∈ M. Poiché ω è non degenere, esiste un vettore v_1 ∈ T_p M e una 1-forma α_1 tali che:

ω(v_1, ·) = α_1

Estendiamo v_1 a un campo vettoriale locale V_1 in un intorno di p. Consideriamo il flusso di V_1 e usiamo il lemma di Moser (una tecnica di deformazione di forme differenziali lungo flussi di campi vettoriali) per costruire iterativamente le coordinate desiderate.

Il punto chiave è che la condizione dω = 0 permette di applicare il lemma di Poincaré localmente, garantendo che ω sia esatta in intorni sufficientemente piccoli. La non degenerazione garantisce poi che possiamo "raddrizzare" ω alla forma canonica. □

Conseguenza importante: A differenza della geometria riemanniana, dove la curvatura è un invariante locale, tutte le varietà simplettiche sono localmente isomorfe. Non esistono invarianti locali! Tutta l'informazione geometrica è globale (topologica).

14.1.3 Esempi Fondamentali

Esempio 1 (Lo Spazio Cotangente):

Sia N una varietà differenziabile di dimensione n. Il fibrato cotangente T*N ha una struttura simplettica canonica.

In coordinate locali (q^1, ..., q^n) su N, le coordinate indotte su T*N sono (q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n) dove p_i sono le componenti dei covettori. La forma simplettica canonica è:

ω = ∑_{i=1}^n dq^i ∧ dp_i

Questa è già nella forma di Darboux! La forma ω è esatta:

ω = -dθ

dove θ = ∑_{i=1}^n p_i dq^i è la forma di Liouville (o forma tautologica).

Verifica della chiusura:

dω = d(-dθ) = 0

perché d² = 0 (il differenziale esterno applicato due volte dà zero).

Verifica della non degenerazione:

In coordinate, ω ha la matrice:

[ω] = [0 I_n] [-I_n 0]

dove I_n è la matrice identità n×n. Il determinante è det([ω]) = (-1)^n ≠ 0, quindi ω è non degenere.

Esempio 2 (Superfici di Riemann):

Ogni superficie orientabile compatta Σ di genere g ≥ 1 ammette infinite strutture simplettiche. Se ω_1 e ω_2 sono due forme d'area (2-forme che integrano a dare l'area), allora:

ω = ω_1 + ω_2

è una forma simplettica su Σ × Σ.

Esempio 3 (Orbite Coadgiunte):

Sia G un gruppo di Lie e g* il duale dell'algebra di Lie. Le orbite dell'azione coadgiunta di G su g* hanno una struttura simplettica naturale, detta struttura di Kirillov-Kostant-Souriau.

Per l'orbita O_μ passante per μ ∈ g*, la forma simplettica è:

ω_μ(ad_*X* *μ, ad*_Y μ) = μ([X, Y])

dove X, Y ∈ g e ad* denota l'azione coadgiunta.

14.2 Campi Vettoriali Hamiltoniani

14.2.1 Definizione e Proprietà

Sia (M, ω) una varietà simplettica e H: M → ℝ una funzione liscia, detta hamiltoniana. Il campo vettoriale hamiltoniano X_H associato a H è definito univocamente dalla condizione:

ı_{X_H} ω = -dH

dove ı denota la contrazione interiore (il prodotto interno di un campo vettoriale con una forma).

Esplicitamente, per ogni vettore v:

ω(X_H, v) = -dH(v) = -v[H]

In coordinate canoniche (q^i, p_i), se:

H = H(q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n)

allora il campo X_H ha componenti:

X_H = ∑_{i=1}^n [∂H/∂p_i · ∂/∂q^i - ∂H/∂q^i · ∂/∂p_i]

Proposizione: Il flusso di un campo hamiltoniano preserva la forma simplettica.

Dimostrazione:

Sia φ_t il flusso di X_H. Dobbiamo mostrare che φ*_t ω = ω per ogni t.

Calcoliamo la derivata di Lie:

L_{X_H} ω = d(ı_{X_H} ω) + ı_{X_H} dω

Usando ı_{X_H} ω = -dH e dω = 0:

L_{X_H} ω = d(-dH) + 0 = -d²H = 0

Quindi la derivata di Lie si annulla, il che significa che ω è invariante lungo il flusso. □

14.2.2 Le Equazioni di Hamilton

Le curve integrali del campo X_H sono le soluzioni delle equazioni di Hamilton:

dq^i/dt = ∂H/∂p_i

dp_i/dt = -∂H/∂q^i

per i = 1, ..., n.

Queste 2n equazioni differenziali ordinarie del primo ordine descrivono l'evoluzione di un sistema meccanico con n gradi di libertà.

Confronto con le equazioni di Lagrange:

Nella formulazione lagrangiana, si parte da una lagrangiana L(q, q̇, t) e si derivano le equazioni di Eulero-Lagrange:

d/dt(∂L/∂q̇^i) - ∂L/∂q^i = 0

Definendo i momenti coniugati:

p_i = ∂L/∂q̇^i

e passando alla hamiltoniana tramite la trasformata di Legendre:

H(q, p) = ∑_i p_i q̇^i - L(q, q̇)

(dove q̇^i sono espresse in funzione di q, p), si ottengono le equazioni di Hamilton.

14.2.3 Costanti del Moto e Teorema di Noether

Una funzione F: M → ℝ si dice costante del moto (o integrale primo) per l'hamiltoniana H se:

dF/dt = 0

lungo le curve integrali di X_H.

Proposizione: F è una costante del moto se e solo se:

{H, F} = 0

dove {·, ·} denota la parentesi di Poisson (vedi sotto).

Il teorema di Noether stabilisce una corrispondenza profonda tra simmetrie e leggi di conservazione.

Teorema di Noether (Formulazione Simplettica):

Sia G un gruppo di Lie che agisce su M in modo simplettico (cioè preservando ω) e hamiltoniano (cioè esiste una mappa momento μ: M → g* tale che i generatori infinitesimali dell'azione sono campi hamiltoniani).

Se l'hamiltoniana H è invariante sotto l'azione di G, allora la mappa momento μ è una costante del moto.

Esempio (Conservazione del Momento Angolare):

Consideriamo un sistema meccanico in $\mathbb{R}^3$ con hamiltoniana:

$H(q, p) = (1/2m)|p|^2 + V(|q|)$

dove V dipende solo dalla distanza dall'origine (simmetria sferica).

Il gruppo SO(3) delle rotazioni agisce su $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ preservando H. La mappa momento è il momento angolare:

$L = q \times p$

Il teorema di Noether garantisce che L è conservato: $dL/dt = 0$.

14.3 La Parentesi di Poisson

14.3.1 Definizione e Proprietà Algebriche

La parentesi di Poisson è un'operazione bilineare su funzioni lisce:

$\{\cdot, \cdot\}: C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$

definita da:

$\{F, G\} = \omega(X_F, X_G) = -\omega(X_G, X_F)$

In coordinate canoniche:

$\{F, G\} = \sum_{i=1}^n [\partial F/\partial q^i \cdot \partial G/\partial p_i - \partial F/\partial p_i \cdot \partial G/\partial q^i]$

Proprietà fondamentali:

1. **Bilinearità:** $\{aF + bG, H\} = a\{F, H\} + b\{G, H\}$ per $a, b \in \mathbb{R}$
2. **Antisimmetria:** $\{F, G\} = -\{G, F\}$
3. **Identità di Jacobi:** $\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0$
4. **Regola di Leibniz:** $\{F, GH\} = \{F, G\}H + G\{F, H\}$

Le prime tre proprietà fanno di $C^\infty(M)$ un'algebra di Lie. La quarta dice che $\{F, \cdot\}$ è una derivazione.

Teorema: Lo spazio delle funzioni lisce con la parentesi di Poisson è un'algebra di Poisson.

14.3.2 Relazione con i Campi Hamiltoniani

La parentesi di Poisson codifica completamente la struttura simplettica. Infatti:

Proposizione:

[X_F, X_G] = X_{-{F,G}}

dove [·, ·] denota la parentesi di Lie di campi vettoriali.

Dimostrazione:

Calcoliamo la derivata di Lie:

L_{X_F}(ı_{X_G} ω) = ı_{[X_F, X_G]} ω + ı_{X_G}(L_{X_F} ω)

Poiché L_{X_F} ω = 0 (i campi hamiltoniani preservano ω):

L_{X_F}(ı_{X_G} ω) = ı_{[X_F, X_G]} ω

Ma ı_{X_G} ω = -dG, quindi:

L_{X_F}(-dG) = -L_{X_F}(dG) = -d(L_{X_F} G) = -d(X_F[G])

Ora, X_F[G] = ı_{X_F}(dG) = -ı_{X_F}(ı_{X_G} ω) = -ω(X_F, X_G) = {G, F} = -{F, G}.

Quindi:

ı_{[X_F, X_G]} ω = -d(-{F, G}) = d{F, G}

Confrontando con ı_{X_H} ω = -dH, otteniamo:

[X_F, X_G] = X_{-{F,G}} □

14.3.3 Parentesi di Poisson Fondamentali

In coordinate canoniche, le parentesi fondamentali sono:

{q^i, q^j} = 0

{p_i, p_j} = 0

{q^i, p_j} = δ^i_j

Tutte le altre parentesi si derivano da queste usando la bilinearità e la regola di Leibniz.

Esempio: Calcoliamo {q^i p_i, q^j p_j}:

{q^i p_i, q^j p_j} = {q^i, q^j p_j} p_i + q^i {p_i, q^j p_j}

= {q^i, q^j} p_j p_i + {q^i, p_j} q^j p_i + q^i {p_i, q^j} p_j + q^i {p_i, p_j} q^j

= 0 + δ^i_j q^j p_i + q^i (-δ^i_j) p_j + 0

= q^i p_i δ^i_j - q^i p_j δ^i_j

= 0 (se i ≠ j) oppure q^i p_i - q^i p_i = 0 (se i = j)

Quindi {q^i p_i, q^j p_j} = 0.

14.4 Trasformazioni Canoniche e Simplettomorfismi

14.4.1 Definizione di Simplettomorfismo

Un simplettomorfismo (o trasformazione canonica) tra varietà simplettiche (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) è un diffeomorfismo φ: M_1 → M_2 che preserva la forma simplettica:

φ*ω_2 = ω_1

dove φ* denota il pullback.

Proprietà:

1. I simplettomorfismi formano un gruppo rispetto alla composizione
2. Il flusso di un campo hamiltoniano consiste in simplettomorfismi
3. I simplettomorfismi preservano le parentesi di Poisson:

{F ◦ φ, G ◦ φ} = {F, G} ◦ φ

14.4.2 Funzioni Generatrici

Le trasformazioni canoniche in uno spazio di fase finito-dimensionale possono essere caratterizzate mediante funzioni generatrici.

Supponiamo di voler trasformare coordinate canoniche (q, p) in nuove coordinate canoniche (Q, P). Esistono quattro tipi di funzioni generatrici:

Tipo 1: S_1(q, Q, t) genera la trasformazione:

p_i = ∂S_1/∂q^i

P_i = -∂S_1/∂Q^i

K = H + ∂S_1/∂t

dove K(Q, P, t) è la nuova hamiltoniana.

Tipo 2: S_2(q, P, t) genera:

p_i = ∂S_2/∂q^i

Q^i = ∂S_2/∂P_i

Tipo 3: S_3(p, Q, t) genera:

q^i = -∂S_3/∂p_i

$P_i = -\partial S_3/\partial Q^i$

Tipo 4: $S_4(p, P, t)$ genera:

$q^i = -\partial S_4/\partial p_i$

$Q^i = \partial S_4/\partial P_i$

Esempio (Trasformazione Identità):

La funzione $S_2(q, P) = \sum_i q^i P_i$ genera la trasformazione identità:

$p_i = \partial S_2/\partial q^i = P_i$

$Q^i = \partial S_2/\partial P_i = q^i$

quindi $(Q, P) = (q, p)$.

14.4.3 Il Teorema di Liouville

Un risultato fondamentale sulla conservazione del volume è il teorema di Liouville.

Teorema di Liouville: Il flusso hamiltoniano preserva la misura di Liouville:

$d\mu = dq^1 \wedge dp_1 \wedge ... \wedge dq^n \wedge dp_n$

Dimostrazione:

La misura di Liouville può essere scritta come:

$d\mu = (1/n!)\, \omega^n$

dove $\omega^n = \omega \wedge \omega \wedge ... \wedge \omega$ (n volte) è la n-esima potenza esterna di ω.

Poiché il flusso hamiltoniano φ_t preserva ω (cioè $\varphi^*_t\, \omega = \omega$), abbiamo:

$\varphi_t(\omega^n) = (\varphi_t\, \omega)^n = \omega^n$

Quindi:

$\varphi_t\, d\mu = \varphi_t[(1/n!)\, \omega^n] = (1/n!)\, \varphi^*_t(\omega^n) = (1/n!)\, \omega^n = d\mu$

Il flusso preserva la misura. □

Conseguenza fisica: In meccanica statistica, questo significa che la densità di probabilità nello spazio delle fasi si conserva lungo l'evoluzione deterministica del sistema (equazione di Liouville).

14.5 Integrabilità e Teorema di Arnold-Liouville

14.5.1 Sistemi Integrabili

Un sistema hamiltoniano con n gradi di libertà si dice completamente integrabile se esistono n funzioni F_1 = H, F_2, ..., F_n funzionalmente indipendenti tali che:

1. {F_i, F_j} = 0 per ogni i, j (in involuzione)
2. Le F_i sono costanti del moto

Teorema di Arnold-Liouville:

Sia (M, ω) una varietà simplettica di dimensione 2n e H: M → $\mathbb{R}$ un sistema completamente integrabile con integrali primi F_1 = H, F_2, ..., F_n in involuzione.

Sia M_c = {p ∈ M : F_i(p) = c_i} una varietà di livello compatta e connessa (toro invariante). Allora:

1. M_c è diffeomorfa al toro n-dimensionale T^n = S^1 × ... × S^1

2. Esistono coordinate angolo-azione (θ^1, ..., θ^n, I_1, ..., I_n) in un intorno di M_c tali che:

    - Le I_i sono costanti su M_c
    - Le θ^i sono coordinate angolari su T^n (periodiche con periodo 2π)
    - La forma simplettica è: ω = ∑_{i=1}^n dθ^i ∧ dI_i
    - L'hamiltoniana dipende solo dalle azioni: H = H(I_1, ..., I_n)
3. Il moto è quasi-periodico sulle componenti connesse di M_c:

θ^i(t) = θ^i(0) + ω_i t

dove ω_i = ∂H/∂I_i sono le frequenze.

Dimostrazione (Schema):

La dimostrazione procede in diversi passi:

Passo 1: Mostrare che M_c è una sottovarietà lagrangiana (cioè ω|_{M_c} = 0).

Poiché le F_i sono in involuzione, i campi hamiltoniani X_{F_i} sono tangenti a M_c e la restrizione di ω a M_c si annulla su coppie di questi campi.

Passo 2: Dimostrare che M_c è diffeomorfa a T^n.

Questo usa tecniche di topologia algebrica e il fatto che M_c è compatta e connessa.

Passo 3: Costruire le variabili azione mediante integrali:

I_i = (1/2π) ∮ _{γ_i} ∑_j p_j dq^j

dove {γ_i} è una base dell'omologia H_1(M_c, $\mathbb{Z}$).

Passo 4: Le variabili angolo θ^i sono definite come coniugate alle azioni tramite una funzione generatrice opportuna. □

14.5.2 Esempi di Sistemi Integrabili

Esempio 1 (Oscillatore Armonico):

L'hamiltoniana dell'oscillatore armonico è:

$H = (1/2m)p^2 + (1/2)m\omega^2q^2$

Questo sistema ha n = 1 grado di libertà e un integrale primo (l'energia stessa). È quindi integrabile.

Variabili angolo-azione:

$I = (1/2\pi\omega)[p^2/(2m) + (1/2)m\omega^2q^2] = H/\omega$

$\theta = \arctan(\omega q \cdot \sqrt{(2m)/p})$

Esempio 2 (Problema di Keplero):

Il problema dei due corpi con interazione gravitazionale 1/r è integrabile. Gli integrali primi sono:

1. L'energia H
2. Le tre componenti del momento angolare L = q × p
3. Il vettore di Runge-Lenz A = p × L - mk(q/|q|)

Sebbene ci siano molti integrali primi, solo n = 3 sono indipendenti (per un problema tridimensionale). Il sistema è integrabile e le orbite sono coniche (ellissi, parabole, iperboli).

Esempio 3 (Trottola di Euler):

La trottola libera (senza forze esterne) ha hamiltoniana:

$H = (1/2)[L_1^2/I_1 + L_2^2/I_2 + L_3^2/I_3]$

dove I_i sono i momenti principali di inerzia e L_i le componenti del momento angolare nel riferimento solidale.

Gli integrali primi sono H e $|L|^2$. Il sistema è integrabile (per n = 3 serve un terzo integrale, che esiste).

14.6 Riduzione Simplettica e Momento

14.6.1 Il Teorema di Marsden-Weinstein

Quando un sistema hamiltoniano ha simmetrie, possiamo "ridurre" la dinamica eliminando i gradi di libertà associati alle simmetrie.

Teorema di Marsden-Weinstein (Riduzione Simplettica):

Sia (M, ω) una varietà simplettica su cui agisce un gruppo di Lie G in modo hamiltoniano, con mappa momento:

μ: M → g*

Sia μ_0 ∈ g* un valore regolare di μ tale che l'azione di G sia libera e propria su μ^(-1)(μ_0). Allora lo spazio ridotto:

M_{μ_0} = μ^(-1)(μ_0)/G_{μ_0}

(dove G_{μ_0} è lo stabilizzatore di μ_0) ha una struttura simplettica unica ω_{μ_0} tale che:

π*ω_{μ_0}* = ιω

dove ι: μ^(-1)(μ_0) → M è l'inclusione e π: μ^(-1)(μ_0) → M_{μ_0} è la proiezione.

Dimostrazione (Idea):

La dimostrazione si basa su:

1. Verificare che μ^(-1)(μ_0) è una sottovarietà di M (valore regolare)
2. Mostrare che ι*ω si annulla sui vettori tangenti alle orbite di G (azione hamiltoniana)
3. Definire ω_{μ_0} come la forma indotta sul quoziente
4. Verificare che ω_{μ_0} è non degenere e chiusa □

Applicazione (Riduzione del Problema dei Due Corpi):

Nel problema di Keplero, il gruppo SO(3) delle rotazioni agisce sul sistema. La mappa momento è il momento angolare L.

Fissando |L| = l_0, possiamo ridurre il problema tridimensionale a un problema unidimensionale nel piano ortogonale a L, ottenendo un'hamiltoniana efficace che dipende solo dalla coordinata radiale.

14.6.2 Punti Critici della Mappa Momento

I punti critici di μ corrispondono a configurazioni di equilibrio relativo del sistema.

Definizione: Un punto p ∈ M si dice equilibrio relativo se esiste ξ ∈ g tale che:

X_H(p) = ξ_M(p)

dove ξ_M è il generatore infinitesimale dell'azione corrispondente a ξ.

Proposizione: Se p è un punto critico di μ, allora p è un equilibrio relativo.

Dimostrazione:

In un punto critico, dμ(p) = 0. Per definizione di mappa momento:

$d\langle \mu, \xi \rangle = \iota_{\xi_M} \omega$

Se $d\mu(p) = 0$, allora per ogni $\xi \in g$:

$d\langle \mu(p), \xi \rangle = 0$

Quindi:

$\iota_{\xi_M} \omega(p) = 0$

Ma anche:

$\iota_{X_H} \omega = -dH$

In un punto di equilibrio, $dH(p)$ può avere una componente lungo le direzioni delle orbite. □

14.7 Quantizzazione Geometrica

14.7.1 Il Problema della Quantizzazione

La quantizzazione è il processo di passare da un sistema classico (descritto da una varietà simplettica) a un sistema quantistico (descritto da uno spazio di Hilbert e operatori).

Il problema fondamentale è costruire una mappa:

$Q: C^\infty(M) \to$ Operatori su $\mathcal{H}$

tale che:

1. $Q(1) =$ identità
2. $Q(\{F, G\}) = (1/i\hbar)[Q(F), Q(G)]$ (relazione di Dirac)
3. $Q(F)$ è autoaggiunto se F è reale

Teorema di Groenewold-Van Hove: Non esiste una quantizzazione che soddisfi tutte queste proprietà per tutte le funzioni F, G.

Questo è un teorema di impossibilità: la quantizzazione esatta è impossibile!

14.7.2 Quantizzazione Geometrica (Approccio di Kostant-Souriau)

La quantizzazione geometrica aggira il teorema di impossibilità quantizzando solo un'algebra opportuna di "osservabili classiche".

Passo 1 (Prequantizzazione):

Si richiede che (M, ω) soddisfi la condizione di integrabilità:

$[\omega/2\pi] \in H^2(M, \mathbb{Z})$

Cioè, $\omega/2\pi$ rappresenta una classe di coomologia intera.

Allora esiste un fibrato in linea $L \to M$ con connessione ∇ la cui curvatura è ω:

$F_\nabla = \omega$

Lo spazio di prequantizzazione è lo spazio delle sezioni di L:

$\mathcal{H}_{pre} = \Gamma(L)$

Per ogni $F \in C^\infty(M)$, definiamo l'operatore di prequantizzazione:

$Q_{pre}(F) = -i\hbar \nabla_{X_F} + F$

Passo 2 (Polarizzazione):

Si sceglie una polarizzazione (una distribuzione lagrangiana integrabile) e si restringe alle sezioni che sono covarianti costanti lungo la polarizzazione.

Per una polarizzazione reale (coordina te angolo-azione), si ottiene:

$\mathcal{H} = L^2(T^n)$

le funzioni d'onda dipendenti solo dalle variabili angolo.

Passo 3 (Metaplettica):

Per polarizzazioni complesse (come la polarizzazione di Kähler), si introduce la correzione metaplettica che coinvolge il fibrato canonico K_M.

Esempio (Quantizzazione di $\mathbb{R}^{2n}$):

Consideriamo $M = \mathbb{R}^{2n}$ con coordinate (q, p) e forma simplettica:

$\omega = \sum_i dq^i \wedge dp_i$

Scegliamo la polarizzazione verticale (coordinate q). Allora:

$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$

e gli operatori di quantizzazione sono:

$Q(q^i) = q^i \cdot$ (moltiplicazione)

$Q(p_i) = -i\hbar \, \partial/\partial q^i$

$Q(H) = -\hbar^2/(2m) \, \Delta + V(q)$ (operatore di Schrödinger)

dove Δ è il laplaciano.

14.7.3 Relazione con la Meccanica Quantistica Standard

La quantizzazione geometrica fornisce un framework rigoroso per comprendere:

1. L'origine geometrica delle regole di quantizzazione canoniche
2. La relazione tra simmetrie classiche e quantistiche
3. Il significato geometrico del principio di corrispondenza
4. Le condizioni topologiche per la quantizzazione (condizione di Bohr-Sommerfeld)

Esempio (Condizione di Bohr-Sommerfeld):

Per un sistema integrabile con variabili azione I_i, la condizione di integrabilità impone:

I_i = n_i ħ, n_i ∈ ℤ

Questo è esattamente la condizione di quantizzazione di Bohr-Sommerfeld della vecchia teoria quantistica!

14.8 Applicazioni alla Geodesia e alla Dinamica Celeste

14.8.1 Formulazione Hamiltoniana delle Geodetiche

Le geodetiche su una varietà riemanniana (M, g) possono essere viste come curve hamiltoniane sul fibrato cotangente T*M.

L'hamiltoniana è:

H(q, p) = (1/2) g^{ij}(q) p_i p_j

Le equazioni di Hamilton:

dq^i/dt = ∂H/∂p_i = g^{ij} p_j

dp_i/dt = -∂H/∂q^i = -(1/2) ∂g^{jk}/∂q^i p_j p_k

sono equivalenti alle equazioni geodetiche.

Vantaggio della formulazione hamiltoniana:

1. Mette in evidenza la struttura simplettica sottostante
2. Permette l'uso di tecniche di meccanica hamiltoniana (integrabilità, perturbazioni, ecc.)
3. Facilita lo studio della stabilità delle geodetiche

14.8.2 Problema dei Tre Corpi

Il problema dei tre corpi in meccanica celeste è un sistema hamiltoniano non integrabile (tranne casi speciali).

L'hamiltoniana è:

H = ∑*{i=1}^3 |p_i|²/(2m_i)* - ∑{i<j} Gm_im_j/|q_i - q_j|

Questo sistema ha le seguenti simmetrie:

1. Traslazioni spaziali → conservazione del momento totale
2. Rotazioni → conservazione del momento angolare totale
3. Omotetie (in assenza di forze esterne) → integrale di Jacobi

Usando la riduzione simplettica, si può ridurre il problema da 18 dimensioni (3 corpi × 3 coordinate × 2 variabili per coordinata) a un sistema con meno gradi di libertà.

Tuttavia, per valori generici delle costanti del moto, il sistema ridotto è caotico (teorema di Poincaré-Birkhoff).

14.8.3 Perturbazioni e Teoria KAM

Per sistemi hamiltoniani quasi-integrabili:

$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(\theta, I)$

dove ε è piccolo, la teoria KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) afferma che molti tori invarianti del sistema integrabile H_0 sopravvivono alla perturbazione.

Teorema KAM (Formulazione Semplificata):

Sia H_0 un sistema integrabile e $H = H_0 + \varepsilon H_1$ una perturbazione piccola. Se le frequenze del sistema imperturbato soddisfano una condizione di non risonanza diofantea:

$|\langle k, \omega \rangle| \geq \gamma / |k|^{\tau}$

per ogni $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, con $\gamma > 0$ e $\tau > n - 1$, allora per ε sufficientemente piccolo esiste un insieme di tori invarianti di misura positiva che è una piccola perturbazione dei tori del sistema H_0.

Applicazione: Nel sistema solare, la maggior parte delle orbite planetarie giacciono su tori KAM, garantendo la stabilità a lungo termine del sistema (almeno per la parte non risonante dello spazio delle fasi).

Limitazioni: La teoria KAM non si applica:

1. Vicino a risonanze di basso ordine
2. Per perturbazioni troppo grandi
3. In regioni caotiche dello spazio delle fasi

In queste regioni, il comportamento può essere caotico, con orbite che diffondono lentamente nello spazio delle fasi (diffusione di Arnold).

La geometria simplettica fornisce il framework matematico naturale per la meccanica classica e la sua quantizzazione. Le strutture simplettiche su varietà codificano la dinamica hamiltoniana, le simmetrie, le leggi di conservazione e la struttura dello spazio delle fasi. Il teorema di Darboux mostra che localmente tutte le varietà simplettiche sono uguali, concentrando l'attenzione sulla struttura globale. La teoria della riduzione simplettica permette di sfruttare le simmetrie per semplificare problemi complessi. La quantizzazione geometrica collega rigorosamente meccanica classica e quantistica. Le applicazioni

spaziano dalla geodesia (geodetiche come curve hamiltoniane) alla dinamica celeste (problema degli n corpi, teoria KAM, stabilità planetaria), mostrando la potenza unificante di questo approccio geometrico alla fisica.

Capitolo 15: Gruppi di Lie, Algebre di Lie e Teoria delle Simmetrie

15.1 Gruppi di Lie: Definizioni e Struttura

15.1.1 Definizione e Primi Esempi

Un gruppo di Lie è una varietà differenziabile G dotata di una struttura di gruppo tale che le operazioni di gruppo:

- Moltiplicazione: m: G × G → G, m(g, h) = gh
- Inverso: i: G → G, i(g) = g^(-1)

siano mappe lisce (differenziabili).

La compatibilità tra struttura differenziabile e struttura algebrica rende i gruppi di Lie oggetti ricchissimi, al crocevia tra geometria, algebra e analisi.

Esempio 1 (Gruppo Lineare Generale):

GL(n, $\mathbb{R}$) = {A ∈ Mat(n×n, $\mathbb{R}$) : det(A) ≠ 0}

è un gruppo di Lie di dimensione n². È un aperto di $\mathbb{R}$^(n²), quindi la struttura differenziabile è quella indotta da $\mathbb{R}$^(n²).

La moltiplicazione è:

m(A, B) = AB (prodotto matriciale)

L'inverso è:

i(A) = A^(-1)

Entrambe sono mappe lisce (razionali nelle componenti).

Esempio 2 (Gruppo Ortogonale):

O(n) = {A ∈ GL(n, $\mathbb{R}$) : A^T A = I}

è una sottovarietà compatta di GL(n, $\mathbb{R}$) di dimensione n(n-1)/2. Le matrici ortogonali preservano il prodotto scalare euclideo.

Il sottogruppo:

$SO(n) = \{A \in O(n) : \det(A) = 1\}$

è il gruppo ortogonale speciale (rotazioni), connesso e di dimensione n(n-1)/2.

Esempio 3 (Gruppo Unitario):

$U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : A^* A = I\}$

dove $A^* = (A^T)^-$ è la trasposta coniugata. Dimensione (reale): n^2.

$SU(n) = \{A \in U(n) : \det(A) = 1\}$

è il gruppo unitario speciale, dimensione $n^2 - 1$.

Esempio 4 (Gruppo Simplettico):

$Sp(2n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(2n, \mathbb{R}) : A^T J A = J\}$

dove:

$J = [0 I_n] [-I_n 0]$

è la matrice simplettica standard. Dimensione: n(2n+1).

Questo gruppo preserva la forma simplettica standard su $\mathbb{R}^{2n}$.

Esempio 5 (Gruppo di Heisenberg):

Il gruppo di Heisenberg è il gruppo di matrici:

$H_n = \{[1 a c] [0 I b] : a, b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}\} [0 0 1]$

con dimensione 2n + 1. È nilpotente e gioca un ruolo importante in meccanica quantistica.

15.1.2 Omomorfismi e Azioni di Gruppo

Un omomorfismo di gruppi di Lie è una mappa liscia $\varphi: G \to H$ tra gruppi di Lie che è anche un omomorfismo di gruppi:

$\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \varphi(g_2)$

Un omomorfismo biiettivo con inverso liscio è un isomorfismo.

Azione di un gruppo di Lie: Un'azione (sinistra) di un gruppo di Lie G su una varietà M è una mappa liscia:

$\Phi: G \times M \to M$

tale che:

1. $\Phi(e, p) = p$ per ogni $p \in M$ (dove e è l'identità di G)

2. $\Phi(g, \Phi(h, p)) = \Phi(gh, p)$ per ogni $g, h \in G$, $p \in M$

Si scrive spesso $\Phi(g, p) = g \cdot p$.

Esempio (Azione di SO(3) su $\mathbb{R}^3$):

Il gruppo SO(3) delle rotazioni agisce su $\mathbb{R}^3$ tramite moltiplicazione matriciale:

$R \cdot v = Rv$

dove $R \in SO(3)$, $v \in \mathbb{R}^3$.

Questa azione preserva la norma euclidea: $|R \cdot v| = |v|$.

15.1.3 Sottogruppi di Lie e Teorema di Cartan

Un sottogruppo di Lie di G è un sottogruppo $H \subseteq G$ che è anche una sottovarietà immersa (cioè localmente omeomorfa a un sottoinsieme di G, ma non necessariamente chiusa).

Teorema di Cartan: Ogni sottogruppo chiuso di un gruppo di Lie è un sottogruppo di Lie (cioè una sottovarietà).

Dimostrazione (Schema):

Sia H un sottogruppo chiuso di G. Si considera l'algebra di Lie h di H (vedi sotto) e si mostra che exp(h) genera localmente H. La chiusura garantisce che non ci siano "lacune" nella struttura differenziabile. □

Esempio: Il sottogruppo $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ (con la struttura additiva) non è un sottogruppo di Lie perché non è una sottovarietà (è discreto).

Il sottogruppo $\{\exp(2\pi i\theta) : \theta \in \mathbb{Q}\} \subset S^1$ non è chiuso e non è un sottogruppo di Lie.

15.2 Algebra di Lie e Campi Vettoriali Invarianti

15.2.1 Campi Vettoriali Invarianti a Sinistra

Un campo vettoriale X su un gruppo di Lie G si dice invariante a sinistra se:

$(L_g)^* X_h = X\{gh\}$

per ogni $g, h \in G$, dove $L_g: G \to G$ è la traslazione sinistra $L_g(h) = gh$.

In altre parole, X commuta con tutte le traslazioni sinistre.

Proposizione: Lo spazio dei campi vettoriali invarianti a sinistra è isomorfo allo spazio tangente all'identità:

$\mathfrak{x}(G)^{inv-L} \cong T_e G$

Dimostrazione:

Dato $X \in \mathfrak{X}(G)^{inv-L}$, consideriamo $X_e \in T_e G$. La condizione di invarianza implica:

$X_g = (L_g)_* X_e$

Quindi X è interamente determinato dal suo valore in e. Viceversa, dato $v \in T_e G$, definiamo:

$X_g = (L_g)_* v$

Questo è un campo invariante a sinistra. Le due costruzioni sono inverse. □

15.2.2 La Parentesi di Lie

Dati due campi vettoriali X, Y su una varietà, la loro parentesi di Lie $[X, Y]$ è il campo vettoriale definito da:

$[X, Y] = X(Y(f)) - Y(X(f))$

per ogni funzione liscia f.

In coordinate locali, se $X = X^i \partial/\partial x^i$ e $Y = Y^i \partial/\partial x^i$, allora:

$[X, Y] = (X^j \partial Y^i/\partial x^j - Y^j \partial X^i/\partial x^j) \partial/\partial x^i$

Proprietà fondamentali:

1. **Bilinearità:** $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$
2. **Antisimmetria:** $[X, Y] = -[Y, X]$
3. **Identità di Jacobi:** $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$
4. **Regola di Leibniz:** $[X, fY] = (X \cdot f)Y + f[X, Y]$

15.2.3 Definizione di Algebra di Lie

L'algebra di Lie di un gruppo di Lie G, denotata $\mathfrak{g}$ o $\mathrm{Lie}(G)$, è lo spazio tangente $T_e G$ dotato della struttura di parentesi di Lie indotta dai campi invarianti a sinistra.

Esplicitamente, dati $v, w \in T_e G$, siano X, Y i campi invarianti corrispondenti. Allora:

$[v, w] = [X, Y]_e$

Proposizione: Se X, Y sono campi invarianti a sinistra, allora anche $[X, Y]$ è invariante a sinistra.

Dimostrazione:

Dobbiamo verificare $(L_g)_* [X, Y]_h = [X, Y]_{gh}$.

Usando le proprietà del pushforward:

(L_g)* *[X, Y]h = [(L_g)* X, (L_g)** Y]_{gh}

Ma (L_g)_* X = X per invarianza, quindi:

= [X, Y]_{gh} □

15.2.4 Calcolo Esplicito per Gruppi Matriciali

Per gruppi di Lie matriciali (sottogruppi di GL(n, $\mathbb{R}$) o GL(n, $\mathbb{C}$)), la struttura di algebra di Lie è particolarmente semplice.

Proposizione: Per G ⊆ GL(n, $\mathbb{R}$), l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è:

$\mathfrak{g}$ = {A ∈ Mat(n×n, $\mathbb{R}$) : exp(tA) ∈ G per ogni t ∈ $\mathbb{R}$}

dove exp è l'esponenziale matriciale:

exp(A) = I + A + A²/2! + A³/3! + ...

La parentesi di Lie è il commutatore:

[A, B] = AB - BA

Dimostrazione (Idea):

Un elemento di T_e G può essere identificato con una curva γ: (-ε, ε) → G con γ(0) = e. La derivata γ'(0) è un elemento dell'algebra di Lie.

Per gruppi matriciali, una tale curva può essere scritta come γ(t) = exp(tA) per qualche matrice A. La condizione exp(tA) ∈ G caratterizza $\mathfrak{g}$.

Il fatto che la parentesi sia il commutatore segue dal calcolo:

d/dt|_{t=0} exp(tX) exp(tY) exp(-tX) exp(-tY) = [X, Y] + O(t²) □

Esempi:

1. $\mathfrak{gl}$**(n,** $\mathbb{R}$**) = Mat(n×n,** $\mathbb{R}$**)** (tutte le matrici)
    - dim = n²
2. $\mathfrak{sl}$**(n,** $\mathbb{R}$**) = {A : tr(A) = 0}**
    - dim = n² - 1
    - Algebra di Lie di SL(n, $\mathbb{R}$)
3. $\mathfrak{so}$**(n) = {A : A^T + A = 0}** (matrici antisimmetriche)
    - dim = n(n-1)/2
    - Algebra di Lie di SO(n)
4. $\mathfrak{su}$*(n) = {A ∈ Mat(n×n,* $\mathbb{C}$*) : A + A = 0, tr(A) = 0}**

- dim = n² - 1
- Algebra di Lie di SU(n)

5. $\mathfrak{sp}$**(2n,** $\mathbb{R}$**) = {A : A^T J + JA = 0}**

   - dim = n(2n+1)
   - Algebra di Lie di Sp(2n, $\mathbb{R}$)

15.3 L'Applicazione Esponenziale

15.3.1 Definizione e Proprietà

L'applicazione esponenziale è una mappa:

exp: $\mathfrak{g}$ → G

definita come segue. Dato X ∈ $\mathfrak{g}$, consideriamo il campo vettoriale invariante a sinistra corrispondente (che denotiamo ancora X). Il flusso di X:

φ_t: G → G

è un omomorfismo a un parametro (cioè φ_t ◦ φ_s = φ_{t+s}). Allora:

exp(X) = φ_1(e)

Per gruppi matriciali: Questa definizione coincide con l'esponenziale matriciale:

exp(X) = ∑_{k=0}^∞ X^k/k!

Proprietà fondamentali:

1. **exp(0) = e** (l'elemento neutro)
2. **d(exp)_0 = id** (il differenziale in 0 è l'identità T_0 $\mathfrak{g}$ → T_e G)
3. **exp((t+s)X) = exp(tX) exp(sX)** per ogni t, s ∈ $\mathbb{R}$, X ∈ $\mathfrak{g}$
4. **exp è un diffeomorfismo locale** da un intorno di 0 in $\mathfrak{g}$ a un intorno di e in G

Proposizione: Per un omomorfismo φ: G → H di gruppi di Lie, sia φ_*: $\mathfrak{g}$ → $\mathfrak{h}$ il differenziale in e (omomorfismo di algebre di Lie). Allora:

φ(exp_G(X)) = exp_H(φ_*(X))

Cioè, il diagramma:

$\mathfrak{g}$ --φ_*--> $\mathfrak{h}$ | | exp_G exp_H | | v v G --φ--> H

commuta.

15.3.2 Formula di Baker-Campbell-Hausdorff

Se G non è abeliano, in generale:

$\exp(X)\exp(Y) \neq \exp(X + Y)$

Tuttavia, esiste una formula che esprime:

$\exp(X)\exp(Y) = \exp(Z(X, Y))$

dove $Z(X, Y)$ è dato da una serie (convergente per X, Y sufficientemente piccoli):

$Z(X, Y) = X + Y + (1/2)[X, Y] + (1/12)[X, [X, Y]] - (1/12)[Y, [X, Y]] + ...$

Questa è la formula di Baker-Campbell-Hausdorff (BCH).

Primi termini espliciti:

$Z(X, Y) = X + Y + (1/2)[X, Y] + (1/12)([X, [X, Y]] + [Y, [Y, X]]) + (1/24)[Y, [X, [X, Y]]] + ...$

Applicazione: Per gruppi di Lie compatti e semisemplici, questa formula permette di studiare la struttura locale del gruppo a partire dall'algebra di Lie.

15.3.3 Sottogruppi a Un Parametro

Un sottogruppo a un parametro di G è un omomorfismo liscio:

$\gamma: \mathbb{R} \to G$

cioè $\gamma(t + s) = \gamma(t)\gamma(s)$.

Teorema: Esiste una corrispondenza biunivoca tra sottogruppi a un parametro di G ed elementi dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, data da:

$\gamma \leftrightarrow \gamma'(0) = X \in \mathfrak{g}$

La relazione esplicita è:

$\gamma(t) = \exp(tX)$

Dimostrazione:

Dato $X \in \mathfrak{g}$, definiamo $\gamma(t) = \exp(tX)$. Per la proprietà 3 dell'esponenziale:

$\gamma(t + s) = \exp((t+s)X) = \exp(tX)\exp(sX) = \gamma(t)\gamma(s)$

Viceversa, dato un sottogruppo a un parametro γ, definiamo $X = \gamma'(0)$. Il campo vettoriale invariante a sinistra generato da X ha γ come curva integrale, quindi $\gamma(t) = \exp(tX)$. □

15.4 Rappresentazioni di Gruppi e Algebre di Lie

15.4.1 Definizioni Fondamentali

Una rappresentazione di un gruppo di Lie G su uno spazio vettoriale V è un omomorfismo:

ρ: G → GL(V)

cioè una mappa liscia che soddisfa:

ρ(gh) = ρ(g)ρ(h) ρ(e) = I_V

Se V è finito-dimensionale, dim V è il grado della rappresentazione.

Una rappresentazione di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ su V è un omomorfismo di algebre di Lie:

ρ: $\mathfrak{g}$ → $\mathfrak{gl}$(V)

cioè una mappa lineare che preserva la parentesi:

ρ([X, Y]) = [ρ(X), ρ(Y)] = ρ(X)ρ(Y) - ρ(Y)ρ(X)

Relazione tra le due nozioni:

Data una rappresentazione ρ: G → GL(V), il differenziale in e:

ρ_* = dρ_e: $\mathfrak{g}$ → $\mathfrak{gl}$(V)

è una rappresentazione dell'algebra di Lie.

Viceversa, data una rappresentazione ρ: $\mathfrak{g}$ → $\mathfrak{gl}$(V), se G è semplicemente connesso, esiste un'unica rappresentazione $\tilde{\rho}$: G → GL(V) tale che d$\tilde{\rho}$_e = ρ.

15.4.2 Rappresentazione Aggiunta

La rappresentazione aggiunta è una rappresentazione fondamentale che codifica la struttura interna dell'algebra di Lie.

Per il gruppo: La rappresentazione aggiunta di G è:

Ad: G → GL($\mathfrak{g}$)

definita da:

Ad_g(X) = d(I_g)_e(X)

dove I_g: G → G è la coniugazione I_g(h) = ghg^(-1).

Esplicitamente, se X genera il sottogruppo a un parametro exp(tX), allora:

Ad_g(X) genera g exp(tX) g^(-1) = exp(t Ad_g(X))

Per l'algebra: La rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{g}$ è:

ad: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$

definita da:

ad_X(Y) = [X, Y]

Proposizione: Ad_g = exp(ad_X) se g = exp(X).

Dimostrazione (Sketch):

Calcoliamo:

d/dt|*{t=0} Ad*{exp(tX)}(Y) = d/dt|_{t=0} [exp(tX) · Y · exp(-tX)]

Usando la formula BCH:

= [X, Y] = ad_X(Y) □

15.4.3 Rappresentazioni Irriducibili e Teorema di Weyl

Una rappresentazione ρ: G → GL(V) si dice irriducibile se non esistono sottospazi invarianti propri (cioè W ⊂ V con 0 ≠ W ≠ V tale che ρ(g)(W) ⊆ W per ogni g).

Teorema di Weyl (Completa Riducibilità):

Ogni rappresentazione di dimensione finita di un gruppo di Lie compatto è completamente riducibile, cioè decomponibile in somma diretta di rappresentazioni irriducibili:

V = V_1 ⊕ V_2 ⊕ ... ⊕ V_k

dove ciascun V_i è irriducibile.

Dimostrazione (Idea):

Si usa il fatto che su un gruppo compatto esiste una misura invariante (misura di Haar). Questo permette di "mediare" prodotti scalari su V per ottenere un prodotto scalare G-invariante. Con tale prodotto, si può prendere il complemento ortogonale di sottospazi invarianti, e procedere per induzione. □

Esempio (SO(3)):

Le rappresentazioni irriducibili di SO(3) sono parametrizzate da interi l ≥ 0. La rappresentazione di spin l ha dimensione 2l + 1.

Per l = 0: rappresentazione banale (scalari) Per l = 1: rappresentazione vettoriale standard $\mathbb{R}^3$ Per l = 2: rappresentazione dei tensori simmetrici traceless ...

15.5 Algebre di Lie Semisemplici e Classificazione

15.5.1 Ideali e Serie di Composizione

Un ideale di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è un sottospazio $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ tale che:

$[X, H] \in \mathfrak{h}$ per ogni $X \in \mathfrak{g}$, $H \in \mathfrak{h}$

Esempi:

1. $\{0\}$ e $\mathfrak{g}$ sono sempre ideali (banali)
2. Il centro $Z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} : [X, Y] = 0 \ \forall Y \in \mathfrak{g}\}$ è un ideale
3. L'algebra derivata $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \text{span}\{[X, Y] : X, Y \in \mathfrak{g}\}$ è un ideale

Un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ si dice:

- **Abeliana** se $[X, Y] = 0$ per ogni X, Y
- **Semplice** se non è abeliana e gli unici ideali sono $\{0\}$ e $\mathfrak{g}$
- **Semisemplice** se non contiene ideali abeliani non banali

Equivalentemente, $\mathfrak{g}$ è semisemplice se è somma diretta di algebre semplici:

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus ... \oplus \mathfrak{g}_k$

15.5.2 La Forma di Killing

La forma di Killing è una forma bilineare simmetrica su $\mathfrak{g}$ definita da:

$B(X, Y) = \text{tr}(\text{ad}_X \circ \text{ad}_Y)$

dove $\text{ad}_X: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ è $\text{ad}_X(Z) = [X, Z]$.

Proprietà:

1. B è simmetrica: $B(X, Y) = B(Y, X)$
2. B è invariante: $B([X, Y], Z) = B(X, [Y, Z])$
3. B è associativa rispetto alla parentesi

Criterio di Cartan: Un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è semisemplice se e solo se la forma di Killing è non degenere (cioè $\det(B) \neq 0$).

Dimostrazione (Idea):

Se $\mathfrak{g}$ contiene un ideale abeliano non banale $\mathfrak{a}$, allora per ogni $X \in \mathfrak{a}$, $Y \in \mathfrak{g}$:

$\text{ad}_X \circ \text{ad}_Y(Z) = [X, [Y, Z]]$

Poiché $[Y, Z] \in \mathfrak{g}$ e $X \in \mathfrak{a}$ è nell'ideale, $[X, [Y, Z]] \in \mathfrak{a}$. Ma $\mathfrak{a}$ è abeliano, quindi iterando si ottiene che $(\text{ad}_X)^2 = 0$. Quindi $\text{tr}(\text{ad}_X \circ \text{ad}_Y) = 0$, cioè B è degenere.

Viceversa, se B è degenere, l'ortogonale rispetto a B di un ideale è ancora un ideale, e si può costruire un ideale abeliano non banale. □

15.5.3 Radici e Sistema di Radici

Per un'algebra di Lie semisemplice complessa $\mathfrak{g}$, si può scegliere una sottoalgebra di Cartan $\mathfrak{h}$ (sottoalgebra abeliana massimale i cui elementi agiscono diagonalizzabilmente su $\mathfrak{g}$ via ad).

Per ogni $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, definiamo lo spazio:

$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \text{ad}_H(X) = \alpha(H) X \text{ per ogni } H \in \mathfrak{h}\}$

Gli $\alpha \neq 0$ tali che $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$ sono detti radici di $\mathfrak{g}$ rispetto a $\mathfrak{h}$.

Decomposizione di radici:

$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\oplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha)$

dove $\Phi \subset \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}$ è l'insieme delle radici.

Proprietà delle radici:

1. Se α è una radice, anche $-\alpha$ è una radice
2. $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ per ogni α
3. Le radici soddisfano relazioni di commutazione specifiche

Sistema di radici: L'insieme Φ forma un sistema di radici, cioè soddisfa assiomi:

1. Φ è finito, genera $\mathfrak{h}^*$, e $0 \notin \Phi$
2. Se $\alpha \in \Phi$, gli unici multipli di α in Φ sono $\pm\alpha$
3. Φ è chiuso per riflessioni rispetto agli iperpiani ortogonali alle radici
4. Per ogni $\alpha, \beta \in \Phi$, il numero $2\langle\beta, \alpha\rangle/\langle\alpha, \alpha\rangle$ è un intero

15.5.4 Classificazione di Cartan-Killing

Teorema di Classificazione (Cartan-Killing):

Le algebre di Lie semplici complesse sono classificate dai diagrammi di Dynkin. Esistono quattro serie infinite:

- **A_n** ($n \geq 1$): $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$, dim = $n(n+2)$
- **B_n** ($n \geq 2$): $\mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$, dim = $n(2n+1)$
- **C_n** ($n \geq 3$): $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$, dim = $n(2n+1)$
- **D_n** ($n \geq 4$): $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$, dim = $n(2n-1)$

e cinque algebre eccezionali:

- **G_2**: dim = 14
- **F_4**: dim = 52
- **E_6**: dim = 78
- **E_7**: dim = 133
- **E_8**: dim = 248

Diagrammi di Dynkin: Ogni algebra semplice è codificata da un grafo con nodi (radici semplici) e archi (angoli tra radici).

Esempi:

A_n: o---o---o---...---o (catena di n nodi)

B_n: o---o---...---o==>o (doppia freccia all'estremo)

C_n: o---o---...---o<==o (doppia freccia invertita)

D_n: o---o---...---o | o (biforcazione)

Conseguenza: Ogni gruppo di Lie semisemplice compatto complesso è classificato da queste algebre di Lie.

15.6 Gruppi di Lie e Geodesia

15.6.1 Metriche Invarianti e Connessioni

Un gruppo di Lie compatto ammette una metrica riemanniana bi-invariante, cioè invariante sia per traslazioni sinistre che destre.

Teorema: Sia G un gruppo di Lie compatto. Esiste una metrica riemanniana g su G tale che:

(L_g)* h = h = (R_g)* h

per ogni g ∈ G, dove L_g e R_g sono traslazioni sinistra e destra.

Dimostrazione (Costruzione):

1. Scegliamo un prodotto scalare arbitrario ⟨·, ·⟩_e su T_e G
2. Per ogni g ∈ G, definiamo:

⟨v, w⟩*g* = ∫*G* ⟨*(L{h^(-1)}*)* v, (L_{h^(-1)})_* w⟩_e dμ(h)

dove μ è la misura di Haar su G (invariante bi-lateralmente)

3. Si verifica che questa metrica è bi-invariante □

Connessione di Levi-Civita:

Per una metrica bi-invariante, la connessione di Levi-Civita ha una forma semplice. Se X, Y sono campi invarianti a sinistra:

∇_X Y = (1/2)[X, Y]

Dimostrazione:

Usando la formula di Koszul e la bi-invarianza, si verifica che:

$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \langle [X, Y], Z\rangle$

per ogni Z invariante a sinistra. Quindi $\nabla_X Y = (1/2)[X, Y]$. □

15.6.2 Geodetiche su Gruppi di Lie

Le geodetiche su un gruppo di Lie compatto con metrica bi-invariante hanno una forma particolarmente semplice.

Teorema: Le geodetiche passanti per l'identità e sono esattamente i sottogruppi a un parametro:

$\gamma(t) = \exp(tX)$

dove $X \in \mathfrak{g}$.

Dimostrazione:

Un sottogruppo a un parametro soddisfa $\gamma'(t) = (L_{\gamma(t)})_* X$, quindi:

$\nabla_{\gamma'} \gamma' = \nabla_X X = (1/2)[X, X] = 0$

Quindi γ è una geodetica.

Viceversa, ogni geodetica passante per e con velocità iniziale X è della forma $\exp(tX)$ per unicità delle soluzioni delle equazioni geodetiche. □

Curvatura: La curvatura sezionale di un piano generato da $X, Y \in \mathfrak{g}$ ortonormali è:

$K(X, Y) = (1/4)|[X, Y]|^2$

Dimostrazione:

Usando $R(X, Y)Z = (1/4)[[X, Y], Z]$ (che segue da $\nabla_X Y = (1/2)[X, Y]$):

$K(X, Y) = \langle R(X, Y)Y, X\rangle = (1/4)\langle [[X, Y], Y], X\rangle$

Usando l'identità di Jacobi e l'invarianza del prodotto scalare:

$= (1/4)\langle [X, Y], [X, Y]\rangle = (1/4)|[X, Y]|^2$ □

Conseguenza: Un gruppo di Lie compatto con metrica bi-invariante ha curvatura sezionale non negativa $K \geq 0$.

15.6.3 Applicazioni alla Geodesia Terrestre

Sebbene la Terra non sia un gruppo di Lie, le simmetrie rotazionali giocano un ruolo importante.

Simmetria SO(3):

Il gruppo delle rotazioni SO(3) agisce sulla superficie terrestre (approssimativamente sferica). Le geodetiche che sono orbite di sottogruppi a un parametro di SO(3) sono i circoli massimi (equatore, meridiani, altri circoli massimi).

Riduzione simplettica: Usando la riduzione simplettica rispetto all'azione di SO(3), il problema della determinazione di geodetiche su un ellissoide di rotazione si riduce a un problema unidimensionale.

Trasformazioni di coordinate geodetiche:

Le trasformazioni tra diversi sistemi di riferimento geodetici (WGS84, ETRS89, ecc.) sono modellate da elementi del gruppo di Euclide:

$E(3) = SO(3) \ltimes \mathbb{R}^3$

(prodotto semidiretto di rotazioni e traslazioni).

Una trasformazione generale è:

$x' = Rx + t$

dove $R \in SO(3)$, $t \in \mathbb{R}^3$.

I parametri di trasformazione (3 angoli di Eulero per R, 3 componenti per t, più eventualmente fattore di scala) formano coordinate su un gruppo di Lie 7-dimensionale.

15.7 Teoria dei Gruppi di Lie e Fisica

15.7.1 Gruppi di Gauge

In fisica delle particelle, le interazioni fondamentali sono descritte da teorie di gauge basate su gruppi di Lie:

- **Elettromagnetismo:** U(1)
- **Forza debole:** SU(2)
- **Forza forte:** SU(3)
- **Modello Standard:** SU(3) × SU(2) × U(1)

Connessioni di gauge: Un campo di gauge è matematicamente una connessione su un fibrato principale con gruppo di struttura G.

Localmente, una connessione è una 1-forma a valori nell'algebra di Lie:

$A = A_\mu^a T^a dx^\mu$

dove T^a sono generatori di $\mathfrak{g}$.

La curvatura (campo di forza) è:

$F = dA + (1/2)[A \wedge A]$

In componenti:

$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f^a{}_{bc} A_\mu^b A_\nu^c$

dove f^a_{bc} sono le costanti di struttura: $[T^b, T^c] = f^a_{bc} T^a$.

15.7.2 Simmetrie e Leggi di Conservazione

Il teorema di Noether stabilisce che ogni simmetria continua corrisponde a una legge di conservazione.

Formulazione con gruppi di Lie:

Sia G un gruppo di Lie che agisce su una varietà M, e sia $L: TM \to \mathbb{R}$ una lagrangiana invariante sotto G.

Per ogni $X \in \mathfrak{g}$, esiste una quantità conservata:

$Q_X = \langle p, \xi_M \rangle - \langle \xi_M, \partial L/\partial v \rangle$

dove ξ_M è il generatore infinitesimale corrispondente a X.

Esempi:

1. **Traslazioni spaziali ($\mathbb{R}^3$):** → Conservazione del momento lineare
2. **Rotazioni (SO(3)):** → Conservazione del momento angolare
3. **Traslazioni temporali ($\mathbb{R}$):** → Conservazione dell'energia
4. **Simmetria U(1):** → Conservazione della carica elettrica

15.7.3 Rappresentazioni e Particelle

In meccanica quantistica, gli stati fisici formano uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ che porta una rappresentazione del gruppo di simmetria.

Gruppo di Poincaré: Il gruppo di simmetria dello spaziotempo di Minkowski è:

$P = SO(1,3) \ltimes \mathbb{R}^{(1,3)}$

Le particelle elementari sono classificate dalle rappresentazioni irriducibili di P, parametrizzate da:

- Massa $m \geq 0$
- Spin s (intero o semintero)

Gruppo SU(3) e Quark:

I quark trasformano nella rappresentazione fondamentale (triplet) di $SU(3)_{colore}$. Gli adroni (protoni, neutroni, mesoni) sono stati legati descritti da rappresentazioni tensoriali:

- Barioni: $3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$

- Mesoni: $3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$

Il singoletto 1 corrisponde a stati invarianti di colore (confinamento).

15.8 Gruppi di Lie Infinito-Dimensionali

15.8.1 Gruppi di Diffeomorfismi

Il gruppo Diff(M) di tutti i diffeomorfismi di una varietà compatta M è un gruppo di Lie infinito-dimensionale (in senso generalizzato).

La sua algebra di Lie è lo spazio dei campi vettoriali su M:

$\mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$

con parentesi di Lie ordinaria.

Applicazioni:

1. **Idrodinamica:** L'equazione di Eulero per fluidi perfetti è l'equazione geodetica su Diff(M) con metrica L^2 indotta dall'energia cinetica
2. **Anatomia computazionale:** Diffeomorfismi sono usati per registrare immagini mediche
3. **Computer vision:** Matching di forme via geodetiche in Diff(M)

15.8.2 Gruppi di Loop

Il gruppo di loop LG di un gruppo di Lie G è:

$LG = \{\gamma: S^1 \to G \text{ lisce}\}$

con moltiplicazione puntuale: $(\gamma_1 \gamma_2)(\theta) = \gamma_1(\theta)\, \gamma_2(\theta)$.

L'algebra di Lie di LG è:

$\mathfrak{Lg} = \{X: S^1 \to \mathfrak{g} \text{ lisce}\}$

con parentesi puntuale.

Applicazione: Le algebre di Kac-Moody (estensioni centrali di $\mathfrak{Lg}$) appaiono in:

- Teoria delle stringhe
- Teorie conformi bidimensionali
- Sistemi integrabili

15.8.3 Gruppi Simplettici Infinito-Dimensionali

Il gruppo Sp(∞) delle trasformazioni simplettiche lineari su uno spazio simplettico infinito-dimensionale appare in:

- Quantizzazione di campi classici
- Teoria quantistica dei campi
- Ottica quantistica

I gruppi di Lie e le algebre di Lie forniscono il linguaggio naturale per descrivere simmetrie in matematica e fisica. La corrispondenza gruppo-algebra via applicazione esponenziale permette di studiare oggetti geometrici (gruppi) con metodi algebrici (algebre). Le rappresentazioni traducono simmetrie astratte in trasformazioni lineari concrete. La classificazione di Cartan-Killing riduce lo studio di gruppi semisemplici a problemi combinatori (diagrammi di Dynkin). In fisica, i gruppi di gauge descrivono le interazioni fondamentali, mentre il teorema di Noether collega simmetrie a leggi di conservazione. In geodesia, le simmetrie rotazionali semplificano il calcolo di geodetiche e trasformazioni di coordinate. I gruppi infinito-dimensionali estendono questi concetti a sistemi con infiniti gradi di libertà (campi, fluidi, stringhe).

Capitolo 16: Calcolo delle Variazioni Avanzato e Metodi Diretti

16.1 Fondamenti del Calcolo delle Variazioni

16.1.1 Funzionali e Spazi di Funzioni

Il calcolo delle variazioni studia l'ottimizzazione di funzionali, cioè mappe che associano numeri reali a funzioni.

Definizione: Dato uno spazio di funzioni F e un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un funzionale è una mappa:

$J: F \to \mathbb{R}$

Esempio fondamentale: Il funzionale energia:

$J[u] = \int_\Omega [F(x, u(x), \nabla u(x))] dx$

dove $F: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è la densità di energia (lagrangiana).

Spazi funzionali standard:

1. **$C^k(\Omega)$:** Funzioni k volte continuamente differenziabili

2. **$L^p(\Omega)$:** Funzioni con norma p integrabile:

   $||u||_p = (\int_\Omega |u|^p dx)^{(1/p)} < \infty$

3. **Spazi di Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$:** Funzioni in L^p con derivate deboli fino all'ordine k in L^p:

$$||u||_{W^{k,p}} = (\sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx)^{1/p}$$

dove $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ è un multi-indice e D^α denota la derivata parziale corrispondente.

Per $p = 2$, si scrive $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ (spazi di Hilbert).

16.1.2 Derivata di Fréchet e Gâteaux

La derivata di un funzionale generalizza la nozione di derivata direzionale.

Derivata di Gâteaux: La derivata di Gâteaux di J in u nella direzione v è:

$$\delta J[u; v] = \lim_{\varepsilon \to 0} [J[u + \varepsilon v] - J[u]]/\varepsilon$$

quando il limite esiste.

Derivata di Fréchet: La derivata di Fréchet di J in u è un funzionale lineare continuo $DJ[u]: F \to \mathbb{R}$ tale che:

$$J[u + v] = J[u] + DJ\underline{u} + o(||v||)$$

dove $o(||v||)/||v|| \to 0$ quando $||v|| \to 0$.

Relazione: Se $DJ[u]$ esiste, allora $\delta J[u; v] = DJ\underline{u}$.

Esempio: Per il funzionale:

$$J[u] = \int_\Omega [(1/2)|\nabla u|^2 - fu] \, dx$$

la derivata di Fréchet è:

$$DJ\underline{u} = \int_\Omega [\nabla u \cdot \nabla v - fv] \, dx$$

16.1.3 Equazione di Eulero-Lagrange

Teorema (Condizione Necessaria del Primo Ordine):

Se u è un punto di minimo locale di $J[u] = \int_a^b F(x, u, u') \, dx$ con condizioni al bordo $u(a) = u_a$, $u(b) = u_b$, allora u soddisfa l'equazione di Eulero-Lagrange:

$$\partial F/\partial u - d/dx(\partial F/\partial u') = 0$$

Dimostrazione:

Consideriamo una variazione $u + \varepsilon\eta$ dove η è una funzione test con $\eta(a) = \eta(b) = 0$.

Calcoliamo:

$d/d\varepsilon\ J[u + \varepsilon\eta]|_{\varepsilon=0} = \int_a^b [\partial F/\partial u \cdot \eta + \partial F/\partial u' \cdot \eta'] dx$

Integrando per parti il secondo termine:

$\int_a^b \partial F/\partial u' \cdot \eta' dx = [\partial F/\partial u' \cdot \eta]_a^b - \int_a^b d/dx(\partial F/\partial u') \cdot \eta dx$

Il termine al bordo si annulla perché $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Quindi:

$d/d\varepsilon\ J[u + \varepsilon\eta]|_{\varepsilon=0} = \int_a^b [\partial F/\partial u - d/dx(\partial F/\partial u')] \eta dx$

Per la condizione di stazionarietà, questo deve annullarsi per ogni η. Per il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni, questo implica:

$\partial F/\partial u - d/dx(\partial F/\partial u') = 0$ □

Esempio (Geodetica): Per $F = \sqrt{(1 + u'^2)}$, l'equazione di Eulero-Lagrange diventa:

$d/dx[u'/\sqrt{(1 + u'^2)}] = 0$

Integrando: $u'/\sqrt{(1 + u'^2)} = c$ (costante), da cui u' = costante, quindi $u(x) = ax + b$ (retta).

16.1.4 Casi Speciali e Integrali Primi

Caso 1 (F non dipende da u): $F = F(x, u')$

L'equazione di Eulero-Lagrange diventa:

$d/dx(\partial F/\partial u') = 0$

quindi $\partial F/\partial u'$ = costante (integrale primo).

Caso 2 (F non dipende da x): $F = F(u, u')$

Esiste l'integrale primo dell'energia:

$E = F - u' \cdot \partial F/\partial u'$ = costante

Dimostrazione:

Calcoliamo la derivata totale:

$dF/dx = \partial F/\partial u \cdot u' + \partial F/\partial u' \cdot u''$

Usando l'equazione di Eulero-Lagrange $\partial F/\partial u = d/dx(\partial F/\partial u')$:

$dF/dx = d/dx(\partial F/\partial u') \cdot u' + \partial F/\partial u' \cdot u''$

$= d/dx(\partial F/\partial u' \cdot u')$

Quindi:

$d/dx[F - u' \cdot \partial F/\partial u'] = 0$ □

Esempio (Brachistocrona): Il problema della brachistocrona (curva di discesa più rapida sotto gravità) ha lagrangiana:

$F = \sqrt{[(1 + u'^2)/u]}$

che non dipende da x. L'integrale primo dell'energia è:

$(1 + u'^2)/u = \text{costante}$

La soluzione è una cicloide.

16.2 Problemi Multidimensionali e Sistemi

16.2.1 Funzionali in Più Variabili

Per un funzionale:

$J[u] = \int_\Omega F(x, u, \nabla u)\, dx$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $u: \Omega \to \mathbb{R}$, l'equazione di Eulero-Lagrange diventa:

$\partial F/\partial u - \sum_{i=1}^n \partial/\partial x^i(\partial F/\partial u_{x^i}) = 0$

o in notazione compatta:

$\partial F/\partial u - \text{div}(\partial F/\partial \nabla u) = 0$

Esempio (Problema di Dirichlet): Per $F = (1/2)|\nabla u|^2 - fu$:

$\partial F/\partial u = -f$

$\partial F/\partial u_{x^i} = u_{x^i}$

L'equazione di Eulero-Lagrange è:

$-f - \text{div}(\nabla u) = -f - \Delta u = 0$

quindi $\Delta u = f$ (equazione di Poisson).

16.2.2 Sistemi di Equazioni di Eulero-Lagrange

Per un sistema con più funzioni incognite $u = (u^1, ..., u^m)$, il funzionale è:

$J[u] = \int_\Omega F(x, u, \nabla u)\, dx$

Le equazioni di Eulero-Lagrange formano un sistema:

$\partial F/\partial u^\alpha - \text{div}(\partial F/\partial \nabla u^\alpha) = 0,\ \alpha = 1, ..., m$

Esempio (Elasticità lineare): Il funzionale energia per un corpo elastico è:

$J[u] = \int_\Omega [W(\varepsilon(u)) - f \cdot u] \, dx$

dove $u: \Omega \to \mathbb{R}^3$ è lo spostamento, $\varepsilon(u) = (1/2)(\nabla u + (\nabla u)^T)$ è il tensore di deformazione, e W è la densità di energia elastica:

$W(\varepsilon) = (\lambda/2)(\text{tr } \varepsilon)^2 + \mu \, \text{tr}(\varepsilon^2)$

con λ, μ costanti di Lamé.

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono le equazioni di Navier:

$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla (\text{div } u) + f = 0$

16.2.3 Condizioni al Bordo Naturali

Quando il funzionale non ha condizioni al bordo prescritte, emergono condizioni al bordo naturali dalla variazione.

Teorema: Se u minimizza:

$J[u] = \int_\Omega F(x, u, \nabla u) \, dx$

senza condizioni al bordo, allora:

1. u soddisfa l'equazione di Eulero-Lagrange in Ω
2. u soddisfa la condizione al bordo naturale su $\partial\Omega$:

   $\partial F/\partial \nabla u \cdot n = 0$

   dove n è la normale esterna a $\partial\Omega$

Dimostrazione (Schema):

Variando $u + \varepsilon\eta$ senza imporre $\eta = 0$ su $\partial\Omega$, otteniamo:

$0 = \int_\Omega [\partial F/\partial u - \text{div}(\partial F/\partial \nabla u)] \, \eta \, dx + \int_{\partial\Omega} \partial F/\partial \nabla u \cdot n \cdot \eta \, dS$

Per l'arbitrarietà di η in Ω, si ha l'equazione di Eulero-Lagrange. Per l'arbitrarietà di η su $\partial\Omega$, si ha la condizione naturale. □

Esempio (Membrana elastica): Per $J[u] = \int_\Omega [(1/2)|\nabla u|^2] \, dx$, la condizione naturale è:

$\partial u/\partial n = 0$ (condizione di Neumann)

16.3 Teoria dell'Esistenza: Metodi Diretti

16.3.1 Il Metodo Diretto nel Calcolo delle Variazioni

Il metodo diretto consiste nel dimostrare l'esistenza di minimi direttamente, senza risolvere le equazioni di Eulero-Lagrange.

Schema generale:

1. Trovare una successione minimizzante u_n (cioè J[u_n] → inf J)
2. Estrarre una sottosuccessione convergente u_{n_k} → u
3. Mostrare che u è un minimo usando la semicontinuità inferiore

Teorema (Weierstrass): Se F è uno spazio topologico, J: F → $\mathbb{R}$ ∪ {+∞} è semicontinuo inferiormente, e l'insieme di livello:

K_c = {u ∈ F : J[u] ≤ c}

è compatto per qualche c, allora J ammette un minimo.

Dimostrazione:

Sia m = inf_{u∈F} J[u]. Per definizione di infimo, esiste una successione u_n con J[u_n] → m. Scegliendo c = J[u_1], si ha u_n ∈ K_c per n sufficientemente grande.

Per compattezza, esiste una sottosuccessione u_{n_k} → u in K_c.

Per semicontinuità inferiore:

J[u] ≤ lim inf J[u_{n_k}] = m

Ma m è l'infimo, quindi J[u] = m. □

16.3.2 Semicontinuità Inferiore e Convessità

Teorema (Semicontinuità per funzionali integrali):

Sia J[u] = ∫_Ω F(x, u, ∇u) dx con Ω ⊂ $\mathbb{R}$^n limitato. Se:

1. F(x, u, p) è convessa in p per ogni x, u fissi
2. F(x, u, p) ≥ α|p|^q - β per qualche α > 0, q ≥ 1, β ≥ 0

allora J è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza debole in W^{1,q}(Ω).

Dimostrazione (Idea):

Si usa il lemma di Fatou e la disuguaglianza di Jensen applicata alla parte convessa. I dettagli tecnici richiedono il teorema di rappresentazione di Riesz e proprietà di compattezza degli spazi di Sobolev. □

Esempio: F(x, u, p) = |p|^2 è convessa in p, quindi J[u] = ∫_Ω |∇u|^2 dx è semicontinuo inferiormente in H^1(Ω).

16.3.3 Coercività e Compattezza

Definizione: Un funzionale J su uno spazio di Banach X si dice coercivo se:

$J[u] \to +\infty$ quando $||u||_X \to \infty$

Teorema (Compattezza degli insiemi di livello):

Se J è coercivo e semicontinuo inferiormente su uno spazio riflessivo X, allora gli insiemi di livello K_c sono debolmente compatti.

Dimostrazione:

Sia $u_n \in K_c$. Per coercività, la successione $||u_n||$ è limitata. In uno spazio riflessivo, ogni successione limitata ha una sottosuccessione debolmente convergente: $u_{n_k} \rightharpoonup u$.

Per semicontinuità debole, $J[u] \leq c$, quindi $u \in K_c$. □

Applicazione (Problema di Dirichlet):

$J[u] = \int_\Omega [(1/2)|\nabla u|^2 - fu] dx$ su $H^1_0(\Omega)$

è coercivo se $f \in L^2(\Omega)$, perché:

$J[u] \geq (1/2)||\nabla u||^2_2 - ||f||_2 ||u||_2$

$\geq (1/2)||\nabla u||^2_2 - C||f||_2 ||\nabla u||_2$ (disuguaglianza di Poincaré)

$\geq (1/4)||\nabla u||^2_2 - C'||f||^2_2$

che tende a $+\infty$ quando $||\nabla u||_2 \to \infty$.

Quindi esiste un minimo $u \in H^1_0(\Omega)$, che è la soluzione debole di $\Delta u = f$.

16.3.4 Teorema di Tonelli

Un teorema classico sull'esistenza di minimi è il teorema di Tonelli.

Teorema di Tonelli: Sia $F: [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tale che:

1. $F(x, u, p)$ è convessa in p
2. $F(x, u, p)/|p| \to +\infty$ quando $|p| \to \infty$ uniformemente in x, u limitati (superlinearità)

Allora il problema:

minimizzare $J[u] = \int_a^b F(x, u(x), u'(x)) dx$

su $u \in W^{1,1}(a, b)$ con $u(a) = u_a$, $u(b) = u_b$

ammette soluzione.

Dimostrazione (Schema):

1. La superlinearità implica coercività in W^{1,1}
2. La convessità implica semicontinuità inferiore debole
3. Il teorema di Rellich garantisce compattezza in L^1
4. Si applica il metodo diretto □

16.4 Condizioni del Secondo Ordine e Campi Estremali

16.4.1 La Seconda Variazione

Per determinare se un punto critico è un minimo, si studia la seconda variazione.

Definizione: La seconda variazione di J in u nella direzione v è:

$$\delta^2 J[u; v] = d^2/d\varepsilon^2 \, J[u + \varepsilon v]|_{\varepsilon=0}$$

Teorema (Condizione necessaria del secondo ordine):

Se u è un minimo locale di J, allora:

$$\delta^2 J[u; v] \geq 0 \text{ per ogni } v$$

Per funzionali del tipo $J[u] = \int_a^b F(x, u, u') \, dx$:

$$\delta^2 J[u; v] = \int_a^b [F_{uu} v^2 + 2F_{uu'} vv' + F_{u'u'} v'^2] \, dx$$

dove tutte le derivate parziali sono valutate in (x, u(x), u'(x)).

Equazione di Jacobi: L'equazione di Eulero-Lagrange per la seconda variazione è:

$$d/dx(F_{u'u'} v' + F_{uu'} v) - F_{uu'} v' - F_{uu} v = 0$$

che si può riscrivere come:

$$F_{u'u'} v'' + [2F_{uu'} - d/dx(F_{u'u'})] v' + [F_{uu} - d/dx(F_{uu'})] v = 0$$

Questa è l'equazione di Jacobi, linearizzazione dell'equazione di Eulero-Lagrange attorno a u.

16.4.2 Punti Coniugati

Definizione: Due punti x_0 e x_1 si dicono coniugati rispetto a un'estremale u se esiste una soluzione non banale dell'equazione di Jacobi che si annulla in x_0 e x_1.

Teorema (Condizione di Jacobi): Se u è un minimo forte di J su [a, b], allora non esistono punti coniugati a a nell'intervallo (a, b].

Dimostrazione (Idea):

Se $x_1 \in (a, b]$ è coniugato a a, esiste v con $v(a) = v(x_1) = 0$ e $v \neq 0$ che soddisfa l'equazione di Jacobi. Ma allora $\delta^2 J[u; v] = 0$, quindi la seconda variazione non è definita positiva, contraddicendo la minimalità forte. □

Esempio (Geodetica sulla sfera):

Per geodetiche sulla sfera S^2, due punti sono coniugati se sono antipodali. Quindi una geodetica minimizza la distanza solo fino al punto antipodale.

16.4.3 Teoria dei Campi Estremali

Un campo estremale è una famiglia di estremali che riempiono una regione senza intersecarsi.

Definizione: Un campo estremale in $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è una mappa:

$$p: \Omega \to \mathbb{R}$$

tale che le curve integrali di $dy/dx = p(x, y)$ sono estremali del funzionale.

Teorema (Condizione di Weierstrass): Se u è immersa in un campo estremale e la funzione di Weierstrass:

$$E(x, y, p, q) = F(x, y, q) - F(x, y, p) - (q - p)F_p(x, y, p)$$

soddisfa $E(x, u(x), u'(x), q) \geq 0$ per ogni q, allora u è un minimo forte.

Dimostrazione (Schema):

Si confronta $J[u]$ con $J[v]$ per una curva ammissibile arbitraria v usando la formula di Weierstrass integrale:

$$J[v] - J[u] = \int_a^b E(x, u(x), u'(x), v'(x))\, dx \geq 0 \quad \square$$

16.5 Problemi Isoperimetrici e Vincoli

16.5.1 Problema Isoperimetrico Classico

Il problema isoperimetrico classico chiede di massimizzare l'area racchiusa da una curva di lunghezza fissata.

Formulazione: Massimizzare:

$$A[\gamma] = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]\, dt$$

soggetto a:

$$L[\gamma] = \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)^2 + y'(t)^2]}\, dt = L_0$$

e $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ (curva chiusa).

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange: Si introduce il lagrangiano aumentato:

$J[\gamma, \lambda] = A[\gamma] + \lambda(L[\gamma] - L_0)$

e si cerca un punto stazionario rispetto a γ e λ.

Risultato: La soluzione è un cerchio di raggio $r = L_0/(2\pi)$.

Dimostrazione (Sketch):

Le equazioni di Eulero-Lagrange per J sono:

$d/dt[(y - \lambda x'/\sqrt{[x'^2 + y'^2]})] = 0$

$d/dt[(-x - \lambda y'/\sqrt{[x'^2 + y'^2]})] = 0$

Integrando e usando la periodicità, si trova che la curva ha curvatura costante $\kappa = 1/r$, quindi è un cerchio. □

16.5.2 Vincoli Integrali Generali

Più in generale, consideriamo il problema:

minimizzare $J[u] = \int_\Omega F(x, u, \nabla u)\, dx$

soggetto a:

$G_i[u] = \int_\Omega G_i(x, u, \nabla u)\, dx = c_i, i = 1, ..., m$

Teorema (Moltiplicatori di Lagrange):

Se u è un minimo locale e i vincoli sono regolari (cioè $dG_i[u]$ sono linearmente indipendenti), allora esistono $\lambda_1, ..., \lambda_m$ tali che u è un punto critico di:

$L[u] = J[u] + \sum_{i=1}^m \lambda_i (G_i[u] - c_i)$

Equazione di Eulero-Lagrange con vincoli:

$\partial F^*/\partial u - \mathrm{div}(\partial F^*/\partial \nabla u) = 0$

dove $F^* = F + \sum_i \lambda_i G_i$.

16.5.3 Vincoli Puntuali e Problemi con Ostacoli

Un problema con ostacolo chiede di minimizzare J[u] soggetto a:

$u(x) \geq \psi(x)$ per ogni $x \in \Omega$

dove ψ è l'ostacolo.

Esempio (Membrana su ostacolo):

Minimizzare:

$J[u] = \int_\Omega [(1/2)|\nabla u|^2 - fu] \, dx$

con $u \geq \psi$ su Ω e $u = g$ su $\partial\Omega$.

Condizioni di complementarietà: La soluzione u soddisfa:

1. $\Delta u = f$ nell'insieme libero $\{x : u(x) > \psi(x)\}$
2. $u = \psi$ nell'insieme di contatto $\{x : u(x) = \psi(x)\}$
3. $\Delta u \geq f$ nell'insieme di contatto

Teorema (Esistenza): Se $\psi \in H^1(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, e l'insieme ammissibile è non vuoto, allora esiste una soluzione unica.

Dimostrazione:

L'insieme ammissibile $K = \{v \in H^1(\Omega) : v \geq \psi, v = g \text{ su } \partial\Omega\}$ è convesso e chiuso in $H^1(\Omega)$. Il funzionale J è strettamente convesso e coercivo, quindi ammette un unico minimo in K per il teorema di proiezione in spazi di Hilbert. □

16.6 Principio di Hamilton e Meccanica Lagrangiana

16.6.1 Il Principio di Minima Azione

In meccanica classica, il moto di un sistema è determinato dal principio di Hamilton (o principio di minima azione).

Principio di Hamilton: Il moto effettivo $q(t)$ di un sistema tra gli istanti t_0 e t_1 rende stazionaria l'azione:

$S[q] = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) \, dt$

dove L è la lagrangiana del sistema.

Lagrangiana per sistemi meccanici:

$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}) - V(q)$

dove T è l'energia cinetica e V l'energia potenziale.

Equazioni di Eulero-Lagrange (equazioni del moto):

$d/dt(\partial L/\partial \dot{q}^i) - \partial L/\partial q^i = 0, \; i = 1, ..., n$

Esempio (Pendolo semplice):

Per un pendolo di lunghezza l e massa m, con angolo θ:

$L = (1/2)ml^2 \dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta)$

L'equazione del moto è:

$ml^2 \ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0$

cioè:

$\ddot{\theta} + (g/l) \sin \theta = 0$

16.6.2 Simmetrie e Teorema di Noether (Revisione)

Teorema di Noether (Versione Lagrangiana):

Se la lagrangiana L è invariante sotto un gruppo a un parametro di trasformazioni:

$q \to q + \varepsilon \xi(q), t \to t$

(cioè $L(q + \varepsilon\xi, \dot{q} + \varepsilon\dot{\xi}, t) = L(q, \dot{q}, t)$),

allora esiste una quantità conservata:

$I = \sum_i \partial L/\partial \dot{q}^i \cdot \xi^i(q)$

Dimostrazione:

Calcoliamo la derivata totale:

$dI/dt = \sum_i [d/dt(\partial L/\partial \dot{q}^i) \cdot \xi^i + \partial L/\partial \dot{q}^i \cdot d\xi^i/dt]$

Usando le equazioni di Eulero-Lagrange:

$= \sum_i [\partial L/\partial q^i \cdot \xi^i + \partial L/\partial \dot{q}^i \cdot \sum_j \partial \xi^i/\partial q^j \cdot \dot{q}^j]$

Per l'invarianza:

$0 = dL/d\varepsilon|_{\varepsilon=0} = \sum_i [\partial L/\partial q^i \cdot \xi^i + \partial L/\partial \dot{q}^i \cdot \xi^i]$

Quindi $dI/dt = 0$. □

Esempi:

1. **Invarianza per traslazioni temporali ($t \to t + \varepsilon$):** Conservazione dell'energia $E = \sum_i \dot{q}^i \partial L/\partial \dot{q}^i - L$
2. **Invarianza per traslazioni spaziali ($q \to q + \varepsilon e$):** Conservazione del momento $p = \partial L/\partial \dot{q}$
3. **Invarianza per rotazioni:** Conservazione del momento angolare $L = q \times p$

16.6.3 Formulazione Hamiltoniana (Sintesi)

Dalla lagrangiana L(q, q̇, t), si passa all'hamiltoniana mediante trasformata di Legendre:

H(q, p, t) = ∑_i p_i q̇^i - L(q, q̇, t)

dove p_i = ∂L/∂q̇^i sono i momenti coniugati.

Le equazioni di Hamilton sono:

dq^i/dt = ∂H/∂p_i

dp_i/dt = -∂H/∂q^i

Queste 2n equazioni del primo ordine sono equivalenti alle n equazioni di Eulero-Lagrange del secondo ordine.

16.7 Applicazioni alla Geodesia

16.7.1 Problema Geodetico come Problema Variazionale

La determinazione di geodetiche sulla superficie terrestre è un problema variazionale.

Funzionale lunghezza:

L[γ] = ∫*{t_0}^{t_1}* √*[g*{ij}(γ(t)) γ̇^i γ̇^j] dt

dove g_{ij} è il tensore metrico sull'ellissoide.

Funzionale energia:

E[γ] = (1/2) ∫*{t_0}^{t_1} g*{ij}(γ(t)) γ̇^i γ̇^j dt

Minimizzare E con parametrizzazione arbitraria equivale a minimizzare L con parametrizzazione proporzionale alla lunghezza d'arco.

Equazioni di Eulero-Lagrange:

d/dt[g_{ij} γ̇^j] - (1/2) ∂g_{kl}/∂γ^i γ̇^k γ̇^l = 0

Semplificando:

γ̈^i + Γ^i_{jk} γ̇^j γ̇^k = 0

le equazioni geodetiche familiari.

16.7.2 Calcolo di Geodetiche su Ellissoide

Per l'ellissoide di rotazione con metrica:

ds^2 = M^2 dφ^2 + N^2 cos^2 φ dλ^2

dove φ è la latitudine, λ la longitudine, il funzionale energia è:

E[φ, λ] = (1/2) ∫_{t_0}^{t_1} [M^2(φ) φ̇^2 + N^2(φ) cos^2 φ λ̇^2] dt

Poiché la lagrangiana non dipende da λ (simmetria rotazionale), esiste l'integrale primo:

∂L/∂λ̇ = N^2 cos^2 φ λ̇ = costante = C

Questa è la formula di Clairaut.

Inoltre, l'integrale dell'energia:

E = M^2 φ̇^2 + N^2 cos^2 φ λ̇^2 = costante

Combinando i due integrali primi, si riduce il problema a una quadratura.

16.7.3 Problema dei Tre Punti Geodetici

Dati tre punti A, B, C sulla superficie terrestre, determinare il triangolo geodetico di area minima con vertici in questi punti.

Formulazione variazionale:

Minimizzare:

A[γ_1, γ_2, γ_3] = ∫∫_T √g d^2x

dove T è la regione racchiusa dalle tre geodetiche γ_i che congiungono A-B, B-C, C-A.

Vincoli:

- γ_1 collega A a B
- γ_2 collega B a C
- γ_3 collega C a A
- Le curve formano un percorso chiuso

Soluzione: Il triangolo geodetico è l'unico triangolo con i lati che sono geodetiche. L'area si calcola mediante l'eccesso sferico:

A = ∫∫_T K dS = α + β + γ - π

dove α, β, γ sono gli angoli del triangolo e K è la curvatura gaussiana.

16.7.4 Determinazione del Geoide

Il geoide è la superficie equipotenziale del campo gravitazionale terrestre. Può essere formulato come problema variazionale.

Problema: Trovare la superficie S tale che:

W(x) = W_0 (costante) per x ∈ S

dove W è il potenziale gravitazionale:

$W(x) = V(x) + (1/2)\omega^2(x_1^2 + x_2^2)$

V è il potenziale newtoniano e ω la velocità angolare terrestre.

Formulazione variazionale: Minimizzare l'energia potenziale totale:

$E[S] = \iint_S W \, dS$

soggetta al vincolo di volume:

$Vol(\Omega_S) = V_0$

dove Ω_S è la regione racchiusa da S.

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

$L[S, \lambda] = \iint_S W \, dS + \lambda(Vol(\Omega_S) - V_0)$

La condizione di stazionarietà implica:

$W + \lambda \, div \, n = costante \, su \, S$

dove n è la normale a S. Per una superficie equipotenziale, W è costante, quindi div n è costante, il che significa curvatura media costante.

16.7.5 Reti Geodetiche Ottimali

Il problema di progettare una rete geodetica ottimale (distribuzione di punti di misurazione) può essere formulato variazonalmente.

Criterio di ottimalità: Minimizzare l'incertezza totale:

$J[x_1, ..., x_n] = tr(C)$

dove C è la matrice di covarianza degli errori di posizione, che dipende dalla geometria della rete.

Vincoli:

- Copertura geografica: i punti devono coprire la regione di interesse
- Visibilità: certe coppie di punti devono essere mutuamente visibili
- Accessibilità: i punti devono essere raggiungibili

Metodo: Si usa una combinazione di tecniche variazionali e algoritmi di ottimizzazione numerica (gradienti, metodi genetici, simulated annealing).

16.8 Teoria Γ-Convergenza e Omogeneizzazione

16.8.1 Γ-Convergenza

La Γ-convergenza è una nozione di convergenza per funzionali introdotta da De Giorgi che preserva i minimi.

Definizione: Una successione di funzionali $J_n: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ Γ-converge a J se:

1. Per ogni $u \in X$ e ogni successione $u_n \to u$:

   $J[u] \leq \liminf J_n[u_n]$

2. Per ogni $u \in X$ esiste una successione $u_n \to u$ (detta successione di recupero) tale che:

   $J[u] = \lim J_n[u_n]$

Proprietà fondamentale: Se J_n Γ-converge a J e u_n minimizza J_n, allora ogni punto limite di $\{u_n\}$ minimizza J.

Applicazione (Omogeneizzazione):

Consideriamo:

$J_\varepsilon[u] = \int_\Omega a(x/\varepsilon, \nabla u)\, dx$

dove $a(y, p)$ è periodica in y (materiale con microstruttura periodica di scala ε).

Quando $\varepsilon \to 0$, J_ε Γ-converge a:

$J_0[u] = \int_\Omega a_{hom}(\nabla u)\, dx$

dove a_{hom} è il coefficiente omogeneizzato, ottenuto risolvendo problemi cellulari sulla cella periodica.

16.8.2 Omogeneizzazione in Geodesia

In geodesia, l'omogeneizzazione si applica a:

Modellazione della crosta terrestre: La crosta ha struttura eterogenea a molte scale. Per analisi su grande scala, si usa un modello omogeneizzato:

ρ_{eff} = media volumetrica pesata di $\rho(x, x/\varepsilon)$

dove ρ è la densità della roccia e ε è la scala delle eterogenità.

Propagazione delle onde sismiche: Le equazioni delle onde in un mezzo eterogeneo:

$\rho(x/\varepsilon)\, \ddot{u} - \mathrm{div}(C(x/\varepsilon) : \nabla u) = 0$

si omogeneizzano a:

$\rho_{eff}\, \ddot{u} - \mathrm{div}(C_{eff} : \nabla u) = 0$

dove C_{eff} è il tensore elastico effettivo.

Il calcolo delle variazioni avanzato fornisce strumenti potenti per risolvere problemi di ottimizzazione infinito-dimensionali. Le equazioni di Eulero-Lagrange traducono problemi variazionali in equazioni differenziali. I metodi diretti garantiscono esistenza di soluzioni senza risolvere esplicitamente le equazioni. Le condizioni del secondo ordine e la teoria dei campi estremali caratterizzano i minimi. I vincoli sono gestiti tramite moltiplicatori di Lagrange. Il principio di Hamilton unifica meccanica classica e calcolo delle variazioni. Le applicazioni geodetiche includono: calcolo di geodetiche, triangoli geodetici, determinazione del geoide, progettazione di reti di misura. La Γ-convergenza e l'omogeneizzazione permettono di trattare problemi multiscala, essenziali per modellare la struttura eterogenea della Terra.

Capitolo 17: Geometria Non-Commutativa e Spazi Quantistici

17.1 Introduzione alla Geometria Non-Commutativa

17.1.1 Filosofia e Motivazioni

La geometria non-commutativa, sviluppata principalmente da Alain Connes, estende i concetti della geometria differenziale a "spazi" che non sono varietà ordinarie ma sono descritti da algebre non commutative.

Idea centrale: In geometria classica, lo spazio X è recuperato dalla sua algebra di funzioni $C(X)$ (teorema di Gelfand-Naimark). In geometria non-commutativa, si studiano algebre A non commutative come se fossero "algebre di funzioni su spazi non commutativi".

Dualità di Gelfand-Naimark:

Per spazi topologici compatti X, esiste una corrispondenza biunivoca:

$\{\text{Spazi topologici compatti Hausdorff}\} \longleftrightarrow \{\text{Algebre C*-commutative}\}$

$X \mapsto C(X) = \{f: X \to \mathbb{C} \text{ continue}\}$

$\text{Spettro}(A) \longleftarrow\!\shortmid A$

dove $\text{Spettro}(A)$ è lo spazio degli ideali massimali (o dei caratteri) di A.

Generalizzazione non-commutativa: Si sostituisce $C(X)$ con un'algebra C* generale A (possibilmente non commutativa), e si definiscono nozioni geometriche (metrica, connessione, curvatura) in termini puramente algebrici.

17.1.2 Algebre di Operatori e Spazi di Hilbert

*Definizione (Algebra C):** Un'algebra C* è un'algebra di Banach A su $\mathbb{C}$ dotata di un'involuzione *: A → A tale che:

$||a^*a|| = ||a||^2$ per ogni $a \in A$

Esempio 1: C(X) per X compatto, con $(f^*)(x) = \bar{f}(x)$ (coniugio complesso).

Esempio 2: B(H) = algebra degli operatori limitati su uno spazio di Hilbert H, con A* = A† (aggiunto).

Esempio 3: Algebra di matrici $M_n(\mathbb{C})$, caso speciale di $B(\mathbb{C}^n)$.

Teorema di Gelfand-Naimark-Segal (GNS): Ogni algebra C* A si rappresenta come sottoalgebra di B(H) per qualche spazio di Hilbert H.

Stati: Uno stato su A è un funzionale lineare positivo normalizzato φ: A → $\mathbb{C}$:

- $\varphi(a^*a) \geq 0$ per ogni $a \in A$
- $\varphi(1) = 1$

Gli stati generalizzano le misure di probabilità su spazi classici.

17.1.3 Derivazioni e Differenziali

In geometria classica, i campi vettoriali sono derivazioni sull'algebra delle funzioni. Questa caratterizzazione si generalizza.

Definizione: Una derivazione su un'algebra A è una mappa lineare δ: A → A che soddisfa la regola di Leibniz:

$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$

Spazio di derivazioni: Der(A) = {δ: A → A derivazione}

forma un'algebra di Lie con la parentesi:

$[\delta_1, \delta_2] = \delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1$

Per $A = C^\infty(M)$: Le derivazioni corrispondono esattamente ai campi vettoriali su M.

Modulo di Kähler (differenziali): Il modulo dei differenziali $\Omega^1(A)$ è il A-bimodulo generato da simboli da con $a \in A$, soggetti a:

- $d(a + b) = da + db$
- $d(ab) = (da)b + a(db)$
- $d(\lambda) = 0$ per $\lambda \in \mathbb{C}$

Connessione con derivazioni: Esiste un isomorfismo canonico:

Der(A) ≅ Hom_A(Ω^1(A), A)

dato da δ ↦ (da ↦ δ(a)).

17.2 Tripla Spettrale e Geometria Riemanniana Non-Commutativa

17.2.1 Definizione di Tripla Spettrale

Una tripla spettrale è una terna (A, H, D) dove:

- A è un'algebra C* (possibilmente non commutativa)
- H è uno spazio di Hilbert che porta una rappresentazione di A
- D è un operatore auto-aggiunto su H (operatore di Dirac) con proprietà specifiche

Proprietà di D:

1. Per ogni a ∈ A, il commutatore [D, a] è limitato
2. Gli elementi a ∈ A con [D, a] = 0 formano una sottoalgebra "centrale"
3. L'operatore (1 + D^2)^(-1/2) è compatto (risolve operatore di Dirac ha spettro discreto)

Interpretazione geometrica: D generalizza l'operatore di Dirac su varietà riemanniane spin, mentre A generalizza l'algebra delle funzioni.

17.2.2 Esempio: Varietà Riemanniana Spin

Sia M una varietà riemanniana compatta spin di dimensione n. Allora:

- A = C^∞(M) (funzioni lisce)
- H = L^2(M, S) (sezioni L^2 del fibrato degli spinori)
- D = operatore di Dirac: D = ∑_{i=1}^n e_i · ∇_i

dove {e_i} è un riferimento ortonormale locale, · denota la moltiplicazione di Clifford, e ∇ è la connessione di spin.

Proprietà:

1. D è auto-aggiunto
2. [D, f] = ∑_i e_i · ∂f/∂x^i per f ∈ C^∞(M)
3. D^2 = -Δ + (R/4) (dove Δ è il laplaciano sugli spinori e R è la curvatura scalare)

17.2.3 Distanza Non-Commutativa

Connes ha introdotto una formula per la distanza su spazi non-commutativi.

Formula di Connes: Per due stati puri φ, ψ su A, la distanza è:

$$d(\varphi, \psi) = \sup\{|\varphi(a) - \psi(a)| : a \in A, ||[D, a]|| \leq 1\}$$

Teorema (Connes): Per M varietà riemanniana compatta e D l'operatore di Dirac, la formula di Connes recupera la distanza geodetica:

$$d(x, y) = \sup\{|f(x) - f(y)| : f \in C^\infty(M), ||\nabla f|| \leq 1\}$$

Dimostrazione (Idea):

Per varietà riemanniane, $||[D, f]|| \approx ||\nabla f||$. La formula diventa:

$$d(x, y) = \sup\{|f(x) - f(y)| : ||\nabla f|| \leq 1\}$$

Questo è esattamente la distanza geodetica per il teorema di Hopf-Rinow applicato a funzioni 1-Lipschitz. □

17.2.4 Curvatura in Geometria Non-Commutativa

La curvatura è codificata nel heat kernel dell'operatore D.

Espansione asintotica del heat kernel: Per $t \to 0^+$:

$$\mathrm{Tr}(e^{-tD^2}) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{(k-n)/2}$$

I coefficienti a_k sono integrali di invarianti locali della geometria.

Per varietà riemanniane:

$$a_0 = (4\pi)^{-n/2} \mathrm{Vol}(M)$$

$$a_1 = (4\pi)^{-n/2} (1/6) \int_M R \, dVol$$

$$a_2 = (4\pi)^{-n/2} (1/360) \int_M (5R^2 - 2|Ric|^2 + 2|Riem|^2) \, dVol$$

dove R è la curvatura scalare, Ric il tensore di Ricci, Riem il tensore di Riemann.

Generalizzazione non-commutativa: I coefficienti a_k sono definiti puramente in termini di D e forniscono "invarianti di curvatura" per spazi non-commutativi.

17.3 Cohomologia Ciclica

17.3.1 Definizione e Motivazione

La cohomologia ciclica, introdotta da Connes, è una teoria cohomologica per algebre che generalizza la cohomologia de Rham.

Catene cicliche: Una n-catena ciclica su A è un funzionale multilineare:

$$\varphi: A \times \ldots \times A \to \mathbb{C} \text{ (n+1 copie)}$$

che è ciclico:

φ(a_1, ..., a_n, a_0) = (-1)^n φ(a_0, a_1, ..., a_n)

Operatore di bordo: L'operatore di bordo b: C_n → C_{n-1} è definito da:

(bφ)(a_0, ..., a_n) = *∑{i=0}^{n-1} (-1)^i φ(a_0, ..., a_i a*{i+1}, ..., a_n) + (-1)^n φ(a_n a_0, a_1, ..., a_{n-1})

Cohomologia ciclica: HC^n(A) = Ker(b)/Im(b) su C^n.

17.3.2 Carattere di Chern

Il carattere di Chern fornisce una mappa dalla K-teoria alla cohomologia ciclica.

K-teoria: K_0(A) classifica proiettori (proiezioni) in A (o M_n(A)).

Carattere di Chern: Per un proiettore e ∈ M_n(A), definiamo:

Ch_0(e) = Tr(e)

Ch_1(e)(a_0, a_1) = Tr(e[e, a_0][e, a_1])

Ch_2(e)(a_0, a_1, a_2) = Tr(e[e, a_0][e, a_1][e, a_2])

e così via. Questi definiscono classi in cohomologia ciclica.

Teorema di indice di Connes-Moscovici: Il carattere di Chern si accoppia con le classi di K-teoria per dare formule di indice generalizzate.

17.3.3 Connessione con de Rham

Per A = C^∞(M), la cohomologia ciclica coincide con la cohomologia de Rham.

Isomorfismo di Connes: HC^*(C^∞(M)) ≅ H^*_{dR}(M) ⊕ ...

(con termini aggiuntivi in gradi pari/dispari).

Traccia di Chern-Connes: Per una varietà M, una n-forma chiusa ω definisce una n-cocatena ciclica:

φ_ω(f_0, ..., f_n) = ∫_M f_0 df_1 ∧ ... ∧ df_n

Il carattere di Chern di un fibrato vettoriale valutato su φ_ω dà il numero caratteristico:

∫_M ch(E) ∧ ω

dove ch(E) è la classe di Chern del fibrato.

17.4 Tori Non-Commutativi e Compattificazione

17.4.1 L'Algebra del Toro Non-Commutativo

Il toro non-commutativo T^2_θ è definito dall'algebra generata da due unitari U, V con la relazione:

VU = e^{2πiθ} UV

dove θ ∈ ℝ è il parametro di non-commutatività.

Per θ = 0: Le relazioni diventano VU = UV (commutative), e A ≅ C(T^2) (funzioni sul toro ordinario).

Per θ irrazionale: A è un'algebra C* semplice (nessun ideale bilaterale non banale) che non è isomorfa a C(X) per nessuno spazio X.

Rappresentazione concreta: A può essere realizzata come algebra di operatori su L^2(S^1):

(Uψ)(z) = zψ(z)

(Vψ)(z) = ψ(e^{2πiθ} z)

dove z ∈ S^1 ⊂ ℂ.

17.4.2 Stati e Tracce

Sul toro non-commutativo esiste un'unica traccia (a meno di normalizzazione):

τ: A_{θ} → ℂ

definita su elementi della forma ∑*{m,n}* *a*{mn} U^m V^n da:

τ(∑ a_{mn} U^m V^n) = a_{00}

Proprietà:

- τ(ab) = τ(ba) (ciclicità)
- τ(a*a) ≥ 0 (positività)
- τ(1) = 1 (normalizzazione)

Interpretazione geometrica: τ generalizza l'integrazione ∫_{T^2} ... dx dy sul toro classico.

17.4.3 Fibrati su Tori Non-Commutativi

I fibrati vettoriali su T^2_θ sono classificati da proiettori nella matrice algebra M_n(A_θ).

Teorema (Connes-Rieffel): I fibrati su T^2_θ con primo numero di Chern c_1 = k sono classificati da:

K_0(A_θ) ≅ ℤ ⊕ ℤ

L'invariante di Connes-Chern di un proiettore e è:

$c_1(e) = (1/2\pi i)\, \tau(e[\nabla_1 e, \nabla_2 e])$

dove ∇_i sono derivazioni corrispondenti a U, V.

Applicazione (Effetto Hall quantistico): Il toro non-commutativo descrive la fisica di elettroni in campi magnetici forti. La conduttanza di Hall è quantizzata in unità di e^2/h ed è data dal numero di Chern di un fibrato su T^2_θ.

17.5 Modello Standard della Fisica delle Particelle

17.5.1 Formulazione Non-Commutativa del Modello Standard

Connes e Chamseddine hanno formulato il Modello Standard della fisica delle particelle come geometria non-commutativa su:

$M \times F$

dove M è lo spaziotempo di Minkowski (4-dimensionale) e F è uno "spazio finito" con 3 punti (generazioni di fermioni).

Algebra: $A = C^\infty(M) \otimes A_F$ dove A_F è l'algebra finito-dimensionale:

$A_F = \mathbb{C} \oplus \mathbb{H} \oplus M_3(\mathbb{C})$

corrispondente ai gruppi di gauge $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$.

Operatore di Dirac: $D = D_M \otimes 1 + \gamma_5 \otimes D_F$

dove D_M è l'operatore di Dirac ordinario su M e D_F codifica la matrice di massa dei fermioni.

Azione spettrale: L'azione di Einstein-Hilbert + Yang-Mills + Higgs del Modello Standard emerge come:

$S = \mathrm{Tr}(f(D/\Lambda))$

dove f è una funzione appropriata e Λ è un cutoff ultravioletto.

Predizioni: Questo approccio predice:

1. La massa del bosone di Higgs (predizione verificata al LHC)
2. La relazione tra costanti di accoppiamento
3. L'esistenza di tre generazioni di fermioni

17.5.2 Meccanismo di Higgs Geometrico

In geometria non-commutativa, il bosone di Higgs non è un campo scalare fondamentale, ma una componente della connessione sullo spazio prodotto $M \times F$.

Connessione: Una connessione su A = C^∞(M) ⊗ A_F è della forma:

∇ = d + A_M ⊗ 1 + γ_5 ⊗ A_F

dove:

- A_M sono i bosoni di gauge ordinari (fotone, W, Z, gluoni)
- A_F è il campo di Higgs

Curvatura: F = ∇^2 contiene:

1. Termini F_M ⊗ 1: curvatura di gauge (campi Yang-Mills)
2. Termini γ_5 ⊗ [A_F, A_F]: potenziale di Higgs
3. Termini misti: accoppiamento Yukawa

Lagrangiana: L'azione ∫ Tr(F^2) si decompone automaticamente in:

S = S_{Einstein} + S_{Yang-Mills} + S_{Higgs} + S_{Yukawa}

17.5.3 Gravità Quantistica e Oltre

La formulazione non-commutativa suggerisce estensioni:

Gravità non-commutativa: Invece di (M, g) varietà riemanniana, si considera (A, D) tripla spettrale, con D che codifica sia metrica che campi di gauge.

Spaziotempo quantistico: A scale di Planck (l_P ≈ 10^(-35) m), lo spaziotempo potrebbe essere descritto da un'algebra non-commutativa:

[x^μ, x^ν] = iθ^{μν}

con θ^{μν} ~ l_P^2.

Effetti fenomenologici:

1. Violazione della località a scale ultra-corte
2. Modifiche alla relazione di dispersione: E^2 = p^2 + m^2 + α(p/M_P)^n
3. Deformazione del principio di indeterminazione: Δx Δp ≥ ħ/2 + βl_P^2 Δp

17.6 Applicazioni alla Teoria dei Numeri

17.6.1 Ipotesi di Riemann e Tracce Spettrali

Connes ha proposto una connessione profonda tra l'ipotesi di Riemann e geometria non-commutativa.

Funzione zeta di Riemann:

ζ(s) = ∑_{n=1}^∞ 1/n^s = ∏_p (1 - p^(-s))^(-1)

dove il prodotto è su tutti i numeri primi p.

Ipotesi di Riemann: Tutti gli zeri non banali di ζ(s) giacciono sulla retta Re(s) = 1/2.

Approccio spettrale: Se esistesse un operatore auto-aggiunto H tale che:

Tr(e^{-tH}) = ∑_n e^{-tλ_n}

con λ_n collegati agli zeri di ζ, l'ipotesi di Riemann seguirebbe dalla realtà dello spettro.

Traccia di Selberg: Per superfici iperboliche Γ\H (dove Γ è un gruppo fuchsiano discreto), la traccia del heat kernel è collegata alla funzione zeta di Selberg:

Z_Γ(s) = ∏*{γ primitive}* ∏{k=0}^∞ (1 - N(γ)^{-(s+k)})

Gli zeri di Z_Γ corrispondono agli autovalori del laplaciano su Γ\H.

Congettura di Connes: Esiste uno "spazio non-commutativo" il cui operatore di Dirac ha spettro collegato agli zeri di ζ.

17.6.2 Gruppi Quantici e Simmetrie Non-Commutative

I gruppi quantici sono deformazioni di gruppi di Lie classici.

Esempio (SU_q(2)): L'algebra di funzioni su SU_q(2) è generata da a, b, c, d con relazioni:

ab = qba, ac = qca, bc = cb, bd = qdb, cd = qdc

ad - da = (q - q^(-1))bc

det_q = ad - qbc = 1

Per q = 1, si recupera SU(2).

Rappresentazioni: Le rappresentazioni di SU_q(2) sono parametrizzate da spin j = 0, 1/2, 1, 3/2, ... come nel caso classico, ma con q-numeri:

[n]_q = (q^n - q^(-n))/(q - q^(-1))

Invarianti quantistici: I gruppi quantici danno origine a nuovi invarianti di nodi e varietà tridimensionali.

Polinomio di Jones: Per un nodo K, il polinomio di Jones J_K(q) è un invariante che si costruisce usando rappresentazioni di SU_q(2).

Per il nodo triviale: J_O(q) = 1

Per il trifoglio: J_{3_1}(q) = q + q^3 - q^4

17.7 Spazi di Snyder e Geodesia Quantistica

17.7.1 Algebra di Snyder

Lo spazio di Snyder è uno dei primi modelli di spaziotempo non-commutativo, proposto nel 1947.

Relazioni di commutazione:

$[x^\mu, x^\nu] = i\beta^2 L^{\mu\nu}$

dove $L^{\mu\nu}$ sono generatori di Lorentz e β è una lunghezza fondamentale (~ lunghezza di Planck).

Interpretazione: Le coordinate dello spaziotempo non commutano, ma l'algebra preserva la simmetria di Lorentz.

Relazione di dispersione modificata:

$E^2 = p^2 + m^2 + \beta^2 p^4$

Questa predice correzioni relativistiche del secondo ordine a energie ultra-alte.

17.7.2 Geodetiche in Spazi Non-Commutativi

In geometria non-commutativa, le geodetiche sono definite come curve che minimizzano la distanza di Connes.

Equazioni geodetiche non-commutative:

Per una tripla spettrale (A, H, D), le "geodetiche quantistiche" soddisfano equazioni della forma:

$D_t \varphi_t = 0$

dove φ_t è un'evoluzione unitaria in H e D_t è una derivata covariante dipendente dal tempo.

Esempio (Toro non-commutativo):

Sul toro T^2_θ, le geodetiche sono curve nella varietà dei proiettori in A_θ.

Per $\theta = p/q$ razionale, il toro è "discreto" a livello quantistico, e le geodetiche formano un reticolo.

Per θ irrazionale, la struttura è più complessa e coinvolge frattali.

17.7.3 Applicazioni alla Gravità Quantistica

Gravità quantistica a loop: In questa teoria, lo spazio emerge da grafi quantici. La geometria è descritta da:

- Stati di spin su archi (rappresentazioni di SU(2))
- Intertwiners su vertici (accoppiamenti invarianti)

Geometria non-commutativa come limite semiclassico: Certi modelli di gravità quantistica hanno un limite di grande distanza descritto da geometria non-commutativa.

Entropia di buchi neri: La formula di Bekenstein-Hawking:

S = A/(4l_P^2)

può essere derivata contando stati di spin in LQG. La geometria non-commutativa dell'orizzonte gioca un ruolo cruciale.

17.8 Geometria Non-Commutativa e Geodesia Terrestre

17.8.1 Modellazione della Rugosità a Piccola Scala

La superficie terrestre ha rugosità a molte scale. A scale molto piccole (< 1 mm), la struttura quantistica potrebbe diventare rilevante in sensori ultra-precisi.

Modello: La superficie S può essere approssimata da uno spazio non-commutativo con:

[x^i, x^j] = iε^{ij}_k x^k / R^2

dove R è il raggio terrestre e ε è una scala di non-commutatività.

Effetti fisici:

1. Incertezza intrinseca nella posizione: Δx Δy ≥ ε
2. Correzioni al tensore metrico: g_{ij} → g_{ij} + δg_{ij}^{NC}
3. Modifiche alle geodetiche a scala ultra-fine

17.8.2 Reti Geodetiche Quantistiche

Con l'avvento di strumenti quantistici (orologi atomici, interferometria atomica), emergono nuove tecniche geodetiche.

Gravimetria quantistica: Usa interferometria atomica per misurare g con precisione Δg/g ~ 10^(-9).

Descrizione non-commutativa: Lo stato quantistico dell'atomo in caduta libera è descritto da operatori di posizione e momento che non commutano:

[x̂, p̂] = iℏ

L'evoluzione nel campo gravitazionale g(x) induce uno spostamento di fase:

φ = (m/ℏ) ∫ g(x(t)) dt

Geodesia quantistica: Combina misure quantistiche con geometria non-commutativa dello spaziotempo per raggiungere precisioni estreme.

17.8.3 Olografia e Superfici Geodetiche

Il principio olografico suggerisce che la fisica in un volume V è codificata su una superficie ∂V.

Corrispondenza AdS/CFT: In gravità quantistica, esiste una dualità tra:

- Teoria di gravità in d+1 dimensioni (bulk)
- Teoria conforme in d dimensioni (boundary)

Applicazione geodetica: La superficie terrestre (2D) potrebbe codificare informazioni sul campo gravitazionale nel volume (3D).

Entropia olografica: L'informazione massima contenibile in una regione Ω è:

S_{max} = Area(∂Ω)/(4l_P^2)

Per la Terra (R ≈ 6 × 10^6 m):

S_{max} ≈ (4πR^2)/(4l_P^2) ≈ 10^{70} bit

Questo pone un limite fondamentale alla risoluzione con cui possiamo conoscere la struttura terrestre.

17.9 Teoria M e Geometria Quantistica

17.9.1 Dualità T e Geometria Non-Commutativa

Nella teoria delle stringhe, la dualità T scambia cerchi grandi e piccoli:

$R \leftrightarrow \alpha'/R$

dove α' è la tensione della stringa.

Interpretazione non-commutativa: Al raggio auto-duale $R = \sqrt{\alpha'}$, la geometria diventa non-commutativa:

$[X, Y] = i\sqrt{\alpha'}$

Questo risolve la singolarità della dualità T.

17.9.2 Matrix Theory

La teoria M (unificazione delle cinque teorie delle stringhe) può essere formulata come meccanica quantistica di matrici infinite:

Lagrangiana BFSS:

L = Tr[(1/2)(DX^i/Dt)^2 - (1/4)[X^i, X^j]^2 + θ^T DΘ/Dt + θ^T Γ^i [X^i, Θ]]

dove X^i sono matrici N×N (coordinate dello spazio), Θ sono spinori matriciali.

Interpretazione: Le matrici X^i descrivono la geometria emergente dello spaziotempo a livello quantistico. La dimensionalità emerge dinamicamente.

17.9.3 Cosmologia Non-Commutativa

In cosmologia primordiale, vicino al Big Bang, lo spaziotempo potrebbe essere non-commutativo.

Inflazione non-commutativa: Il potenziale dell'inflaton è modificato:

V(φ) → V(φ) + V_{NC}(φ, θ)

dove θ parametrizza la non-commutatività dello spazio.

Effetti osservabili:

1. Correzioni allo spettro di potenza delle perturbazioni: P(k) → P(k)[1 + δP_{NC}(k, θ)]
2. Violazione dell'invarianza di scala esatta
3. Non-gaussianità nel CMB

Limiti sperimentali: Le osservazioni di Planck del CMB pongono vincoli:

θ < 10^(-60) GeV^(-2)

corrispondente a una scala di non-commutatività l_{NC} < 10^(-18) m.

La geometria non-commutativa fornisce un framework matematico rigoroso per descrivere spazi che emergono dalla meccanica quantistica e dalla teoria delle stringhe. Le triple spettrali generalizzano varietà riemanniane a setting non-commutativi, preservando nozioni essenziali come distanza, curvatura, connessione. La cohomologia ciclica generalizza de Rham e K-teoria. I tori non-commutativi forniscono esempi espliciti e si applicano all'effetto Hall quantistico. Il Modello Standard emerge come geometria non-commutativa su M × F. Connessioni con l'ipotesi di Riemann e teoria dei numeri mostrano profondità matematica. Applicazioni alla gravità quantistica, cosmologia, e geodesia quantistica dimostrano rilevanza fisica. La geometria non-commutativa è un ponte tra geometria differenziale classica, meccanica quantistica, e gravità, offrendo nuovi strumenti per comprendere la struttura fondamentale dello spazio-tempo.